ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
104

For Senior & Graduate Courses

弦理論と行列模型

弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方

◆

土屋 麻人　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-104

弦理論と行列模型

弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方

土屋 麻人　著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する**領域から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

まえがき

本書は弦理論の非摂動的定式化としての行列模型について解説したものである．弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補であり，活発な研究が進められている．元々ハドロンを記述する目的で産声を上げた弦理論は，1980 年代半ばからの第 1 次革命期に続き，1990 年代半ばからの D ブレーンを軸にした第 2 次革命期を経て，急速な発展を遂げたが，まだその全貌は明らかになっていない．特に，摂動論でしか弦理論は定式化されておらず，今後は非摂動的な弦理論の定義を与えることがひとつの大きな課題であると考えられる．行列模型はこのような弦理論の非摂動的定式化の有力な候補である．非臨界次元の弦理論については行列模型は成功を収め，現実的な超弦理論についてもいくつかの行列模型が非摂動的定式化として提案されている．

これらの提案や最近のゲージ重力対応の進展においては,「出現する（創発する）時空 (emergent space-time，emergent geometry)」の概念が鍵になっていると思われる．すなわち，理論の定義においては，存在しない時空が，ダイナミカルに行列やゲージ場の自由度から生成されるということである．そこで，本書においては，今後の弦理論の非摂動的定式化の発展のヒントになることを願って，行列模型における様々な時空の出現の仕方に焦点を当てて話を進めていく．

本書を読むにあたっては，場の量子論の基礎的知識は仮定されている．弦理論の知識はあったほうが望ましいが，なくても読み進めることができると期待している．本書の構成を以下に簡単に述べる．第 1 章では，弦理論の非摂動効果が一般的にどういうものかを場の量子論の非摂動効果と比較しながら見る．同時に，弦理論の非摂動的定式化の必要性を論じる．第 2 章では，弦理論の雛型である非臨界次元の弦理論とそれを非摂動的に定義する行列模型を解説する．ここで，行列模型が弦理論の非摂動的定式化として有望であることを実感していただければと思う．ここでは，行列模型のファインマンダイアグラムが 2 次元面のランダム単体分割に対応し，そこから弦の世界面が出現すると同時に，行列の固有値の空間から弦の標的空間が出現するという 2 つの意味での時空の出現が見られる．また，プラナー極限やループ方程式など後の章に引き継がれる概念がここで登場する．第 3 章では，行列模型における時空の出現の最初の例と言えるラージ N 還元を解説する．時空の出現の仕方を強調したが，ラージ N ゲージ理論の非摂動的定式化という側面にも触れる．第 4 章はラージ N 還元と類似した，行列模型における T 双対について解説する．応用として，オービフォルディングによる超対称ゲージ理論の格子理論の構築にも触れる．第 5 章は非可換幾何と行列模型の関係について解説する．これは，通常のラージ N 還元とは異なった時空の出現の仕方である．時空の非可換性は量子重力や弦理論において本質的であると考えられるため，それが行列模型とどのように関係するかを見るのは有意義であろう．以上の章を受ける形で第 6 章では，超弦理論の非摂動的定式化の候補として提案された行列模型を解説する．参考文献は本書を読み進める上で助けになると考えられるものにとどめたことをご容赦願いたい．

本書がこれから弦理論の非摂動的定式化を発展させようとする方々の一助となれば幸いである.

米谷民明氏, 川合光氏, 糸山浩司氏, 北澤良久氏, 石橋延幸氏, 浜田賢二氏, 磯暁氏, 多田司氏, 福間将文氏, 青木一氏, 西村淳氏をはじめとする多くの先生方, 先輩方, 同僚の方々, 学生諸君との長年の共同研究や議論が, 本書の成立にとって欠かせないものになっています. この場を借りて, 厚く御礼申し上げます. また, 本書の執筆を勧めてくださり, 執筆の際にも大変お世話になったサイエンス社の平勢耕介氏に感謝いたします.

2014年1月

土屋麻人

目　次

第 1 章
弦理論の非摂動効果

弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補である．本章では，弦理論において，その非摂動的定式化である行列模型が登場した背景について述べる．まず，弦理論の非摂動効果がどのようなものかを見た後に，弦理論の非摂動的定式化の必要性について述べる．

1.1 弦理論の非摂動効果

弦理論の非摂動効果を見る前に，場の量子論における非摂動効果がどのようなものかを思い出そう．具体的に，4 次元のゲージ理論を考え，その結合定数を g とする．摂動展開による自由エネルギー F の計算は，図 1.1 のファインマンダイアグラムを足し上げることに相当する．

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g^{2n}. \tag{1.1}$$

ここで $C_n g^{2n}$ は $n+1$ ループの連結ダイアグラムの総和を表す．$n+1$ ループの連結ダイアグラムの個数は n が大きいとき，$n!$ で増えていくことが知られている．したがって，C_n は n が大きいとき，

$$C_n \sim n! C^{-n} \tag{1.2}$$

のように振舞うことが期待される．ここで，C はある定数である．これから，摂動級数 (1.1) は収束せず，漸近級数であることがわかる．

例として，(1.2) の振舞いを ϕ^4 理論の場合に見てみよう．次の 0 次元の理論の摂動展開を考える．

$$I(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{g^2 x^4}{4!}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g^{2n}. \tag{1.3}$$

ここで，I_n は対称性因子も含めて分配関数への $n+1$ ループの寄与に対応する

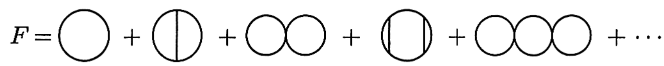


図 1.1　ゲージ理論における自由エネルギーの摂動展開．実線はさまざまな場のプロパゲーターを表す．

ダイアグラムの個数を表す．I_n を計算すると，

$$I_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n!} \frac{g^{2n}}{(-4!)^n} \int_0^\infty x^{4n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{(-1)^n g^{2n}}{\sqrt{\pi} n! 6^n} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4}$$

となる．n が大きいとき，これが実際に

$$I_n \sim \left(-\frac{2}{3}\right)^n n! \tag{1.5}$$

と振舞うことは簡単に確かめられる．さて，$\log I(g)$ は連結ダイアグラムだけを取り出し，自由エネルギーを与えるが，$n+1$ ループに対応するダイアグラムの数も n が大きいとき，$C^{-n} n!$ で与えられることがわかるだろう．

一般に，漸近級数がユニークに関数を決めるとき，ボレル和可能でその関数は**ボレル和**で与えられる．(1.1) の漸近級数は $C > 0$ のときはボレル和可能ではないことが以下で明らかになるが，とりあえずこの級数のボレル和を試みる．ボレル和は次式で定義される．

$$F = \int_0^\infty dt\, e^{-t} B(t). \tag{1.6}$$

ここで，$B(t)$ はボレル変換で，

$$B(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{C_n}{n!} (g^2 t)^n \tag{1.7}$$

で与えられる．これに，(1.2) を適用すると，

$$B(t) \sim \frac{1}{1 - \frac{g^2}{C} t} \tag{1.8}$$

と見積もれる．これは $C > 0$ のとき，実軸正の部分の $t = C/g^2$ に極をもつため，ボレル和 (1.6) は

$$e^{-\frac{C}{g^2}} \tag{1.9}$$

ほどの不定性を持つ．これは $g = 0$ に真性特異点を持ち，g の級数からは得られないため，確かに非摂動効果である．通常，これはインスタントン効果として理解される．

次に，弦理論の自由エネルギーの摂動展開を考えよう．簡単のため，閉弦の理論を考えると，図 1.2 のように，閉じた**リーマン面**に対応する**世界面**を足し

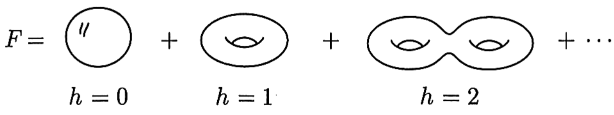


図 1.2　弦理論における自由エネルギーの摂動展開．h はハンドル数（ジーナス数）を表す．

上げることになり，リーマン面の**ハンドル数（ジーナス数）**h による展開となる．弦の結合定数を g_{st} とすると，自由エネルギー F の摂動級数は以下のように表せる．

$$g_{st}^2 F = \sum_{h=0}^{\infty} C_h g_{st}^{2h}. \tag{1.10}$$

ここで，ゲージ理論の場合と異なり，g_{st} の各冪に対応するダイアグラムは一つであることに注意しよう．また，閉じたリーマン面の**オイラー数**χ は $\chi = 2-2h$ で与えられることから，オイラー数 χ のリーマン面の F への寄与は $(1/g_{st})^{\chi}$ という g_{st} 依存性を持つと言える．さて，ハンドル数 h の閉じたリーマン面の**モジュライ空間**の体積は h が大きいとき，$\sim (2h)!$ のように振舞うことが知られている[1]．ゲージ理論のときのダイアグラムの個数に対応するのが，このモジュライ空間の体積であり，ダイアグラムの値がモジュライ空間の体積で支配されると仮定するのは自然である．そうすると，h が大きいとき，C_h は

$$C_h \sim (2h)! C^{-2h} \tag{1.11}$$

のように振舞うことが期待される．ここで，ふたたび C はある定数である．やはり，摂動級数 (1.10) は収束せず，漸近級数であることがわかる．

ボレル和とボレル変換はそれぞれ以下のようになる．

$$g_{st}^2 F = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} B(t), \tag{1.12}$$

$$B(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_h}{(2h)!} (g_{st} t)^{2h}. \tag{1.13}$$

$B(t)$ に (1.11) を適用すると，

$$B(t) \sim \frac{1}{1 - \frac{g_{st}^2}{C^2} t^2} \tag{1.14}$$

となり，これは実軸上 $t = C/g_{st}$ のところに極を持つため，ボレル和 (1.12) は

$$e^{-\frac{C}{g_{st}}} \tag{1.15}$$

ほどの不定性を持つ[1]．ゲージ理論の場合 (1.1) も弦理論の場合 (1.10) も結合定数の 2 乗 (g^2 と g_{st}^2) の級数であったにもかかわらず，その非摂動効果の大きさの見積もり (1.9) と (1.15) における結合定数の依存性は異なることに注意し

よう．弦理論のほうがゲージ理論に比べて結合定数が小さくても非摂動効果がより大きいことがわかる．

弦理論における非摂動効果 (1.15) は以下に見るように **D** ブレーンの効果として理解できる[2]．ここでは，話を簡単にするために **D** インスタントンを考えよう．D インスタントンは時空内の点で表され，閉弦の理論において，これが存在すると開弦の端点がそこにくっつく．D インスタントンがあるときの自由エネルギーへの最も効く寄与は図 1.3 で与えられる．ここで，黒丸は D インスタントンを表し，そこにくっついている各図形は図 1.4 のように D インスタントン上の開弦の円盤振幅を表している．前述のようにオイラー数 χ の世界面の振幅は $(1/g_{st})^{\chi}$ に比例し，円盤のオイラー数は 1 なので，開弦の円盤振幅は C をある定数として

$$-\frac{C}{g_{st}} \tag{1.16}$$

と書ける．したがって，図 1.3 の寄与は確かに (1.15) となる．次元の高い D ブレーンが存在するときも複雑になるが本質的には同じ議論になる．こうして，ゲージ理論の非摂動効果がインスタントンの効果として理解できたように，弦理論の非摂動効果は D ブレーンの効果として理解できる．

1.2 弦理論の非摂動的定式化の必要性

1.1 節では，弦理論の非摂動効果は D ブレーンの効果として理解できることを見た．これはゲージ理論の非摂動効果がインスタントン効果として理解できることに類似している．しかし，これで非摂動効果をすべて理解した，あるいは非摂動効果をすべて取り入れた計算ができるという訳ではない．ゲージ理論の場合も，カラーの閉じ込めの導出，ハドロンの質量の計算などの非摂動的な

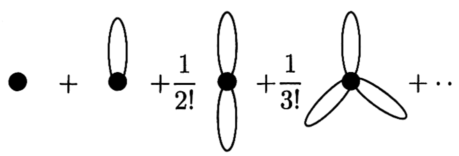


図 1.3　D インスタントンがあるときの最も効く寄与．黒丸は D インスタントンを表す．

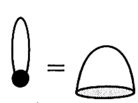


図 1.4　D インスタントン上の円盤振幅．

計算には非摂動的な定式化である**格子ゲージ理論**に訴えなければならない．インスタントンを考えてそのまわりの摂動展開を行うといったことではこれらの問題に太刀打ちできない*1)．

超弦理論は現在摂動論に基づいてしか定式化されていない．その範囲で丁度ゲージ理論でインスタントンを考えるように，D ブレーンを考えることは可能である．しかし，このようなアプローチをとった場合，理論的に許される安定な真空が無数に存在してしまう．各真空は異なる時空次元，異なるゲージ群，異なる物質場，異なる宇宙項定数などをもっている．このような状況を**ランドスケープ**と呼ぶことがあり，通常，統計的手法を使ったり[3]，**人間原理**に訴えるなどして真空を選びだすことになる．

超弦理論の摂動論のもうひとつの問題点は宇宙の始まりの特異点のところで一般にはそれが破綻してしまうことである．言い換えると，特異点が摂動論では一般には解消されないということである．(例えば，文献 [4]，[5] を参照.) よく知られているように，アインシュタイン方程式の宇宙論的解の時間をさかのぼっていくと，時空の特異点にぶつかり重力の古典論である一般相対性理論は破綻し，重力の量子効果でこれは克服されると信じられている．この量子重力理論の最有力候補が超弦理論であるが，摂動論に依るかぎり，重力の効果が強くなる特異点のところでそれは無力になるということである．

以上から，ゲージ理論の場合の格子ゲージ理論にあたる超弦理論の非摂動的定式化を構築する必要があることがわかるであろう．超弦理論の非摂動的定式化を用いれば，非摂動的な真空をユニークにあるいは最も確からしく決定できて，宇宙の始まりの特異点の問題も解決できると期待される．これによって，超弦理論から素粒子論や宇宙論に対する新しい知見や予言を得ることができるであろう．実際，90 年代の後半にそのような非摂動的定式化の候補として，いくつかの行列模型が提唱された．代表的なものに，**IIB 行列模型**[6]，**Matrix Theory**[7]，**matrix string theory**[8] がある．これらは，10 次元 $\mathcal{N}=1$ $U(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論をそれぞれ 0 次元，1 次元，2 次元に次元還元した形をとる．

次章では非臨界次元の弦理論という弦理論の雛型に対して，行列模型がその非摂動的定式化を与えることを見る．第 6 章で現実世界を記述しうる超弦理論の非摂動的定式化の試みについて解説する．

*1) このようなことがうまくいく場合もある．例えば，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー有効作用は，多重インスタントンの足し上げの部分と摂動部分の和で理解される．

第 2 章
非臨界次元の弦理論と行列模型

本章では，前章で見た弦理論の非摂動効果を取り入れて，行列模型が弦理論を非摂動的に定義しうることを理解する．例として，弦理論としては雛型であるが，対応する行列模型が正確に解ける非臨界次元の弦理論を扱う．

2.1 リューヴィル理論

この節では，行列模型に入る前に，**非臨界次元の弦理論**を記述する連続理論である**リューヴィル理論**を解説する．ここでは，簡単のためボゾニックな理論を扱う．

2 次元の閉じた向き付け可能な多様体を考え，この多様体上に計量場 $g_{ab}(x)$ と中心電荷が D であるスケール不変な D 個のスカラーの物質場を導入する（図 2.1）．ここで，$x=(x^1,x^2)$ は 2 次元多様体の座標であり，$a,b=1,2$ である．この多様体を弦の世界面とみなすと，この物質場は弦の世界面から**標的空間**への写像とみなせる．そして，多様体の面積を A に固定した分配和を以下のように定義する．

$$Z(A)=\int\frac{\mathcal{D}g}{\mathrm{vol(Diff)}}\,Z_M[g]\,\delta\left(\int d^2x\sqrt{g}-A\right). \tag{2.1}$$

ここで，多様体のトポロジーは固定されている．今，それはオイラー数 χ を与えれば決まる．第 1 章で述べたように，多様体のハンドルの数（ジーナスの数）を h とすると，$\chi=2-2h$ の関係がある．$Z_M[g]$ は計量場 $g_{ab}(x)$ を固定したときの物質場の分配和で，具体的には

$$Z_M[g]=\int\mathcal{D}Xe^{-\frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{g}g^{ab}\partial_aX^i\partial_bX^i} \tag{2.2}$$

で定義される．$X^i(x)$ $(i=1,\cdots D)$ は D 個の物質場で，D 次元の標的空間への世界面の写像を表す．この時点で D は整数だが，後に $D\leq 1$ の場合を特に考える．D が整数でないときは中心電荷 D の共形場を結合させることによっ

て実現する．また，vol(Diff) は 2 次元の **diffeomorphism** の空間の体積である．(2.1) と (2.2) において，計量場と物質場の経路積分の測度は以下のような関数空間のノルムによって定義されている．

$$||\delta g||^2 = \int d^2x\sqrt{g}\, g^{ab}\, g^{cd}\, \delta g_{ac}\, \delta g_{bd}, \tag{2.3}$$

$$||\delta X||^2 = \int d^2x\sqrt{g}\, \delta X^i\, \delta X^i. \tag{2.4}$$

これらのノルムは diffeomorphism のもとで不変なので，経路積分の測度も diffeomorphism 不変である．(2.1) は非臨界次元の弦理論という見方の他に，量子重力理論の雛型としての 2 次元量子重力理論と見ることができる．

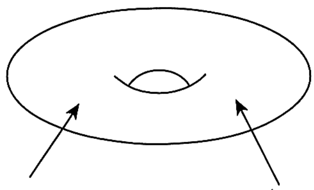


図 2.1　2 次元面上の計量場とスケール不変なスカラー場．

さて，コンフォーマルゲージで経路積分 (2.1) を実行する [9], [10]．コンフォーマルゲージではゲージスライスはスカラー場 $\phi(x)$ と有限個のモデュライパラメータ τ で以下のように表される．

$$g_{ab}(x) = \hat{g}_{ab}(\tau; x)\, e^{\phi(x)}. \tag{2.5}$$

ここで $\phi(x)$ と τ はそれぞれ**コンフォーマル（リューヴィル）モード**，モデュライと呼ばれる．モデュライは 2 次元多様体のトポロジーによって決まっている．$\hat{g}_{\mu\nu}(\tau; x)$ は τ に依存した背景計量場である．このゲージでは経路積分 (2.1) は次のように書かれる．

$$Z(A) = \int d\tau \int \mathcal{D}_1\phi\, \Delta_{FP}[\hat{g}e^{\phi}]\, Z_M[\hat{g}e^{\phi}]\delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}e^{\phi} - A\right). \tag{2.6}$$

ここで Δ_{FP} はゲージ固定 (2.5) に対する Faddeev-Popov の行列式で，積分の測度 $\mathcal{D}_1\phi$ はノルム

$$||\delta\phi||^2 = \int d^2x\sqrt{\hat{g}}e^{\phi}\, (\delta\phi)^2 \tag{2.7}$$

より定義されている．

付録 A に示されているように，コンフォーマルモード ϕ の依存性は，次のように引き出せる *1)

$$\Delta_{FP}[\hat{g}e^{\phi}] = \Delta_{FP}[\hat{g}]\, e^{-\frac{26}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]}, \tag{2.8}$$

$$Z_M[\hat{g}e^{\phi}] = Z_M[\hat{g}]\, e^{\frac{D}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{D}_1\phi = \mathcal{D}_0\phi\, e^{\frac{1}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]}. \tag{2.10}$$

ここで，S_L はリュ－ヴィル作用で，その表式は

$$S_L[\hat{g};\phi] = \int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left(\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\,\partial_a\phi\partial_b\phi + \hat{R}\phi\right) \tag{2.11}$$

で与えられる．積分の測度 $\mathcal{D}_0\phi$ は背景場計量を用いたノルム

$$||\delta\phi||_0^2 = \int d^2x\sqrt{\hat{g}}\,(\delta\phi)^2 \tag{2.12}$$

より今度は定義されている．(2.8)〜(2.10) を (2.1) に代入すると，

$$Z(A) = \int d\tau \int \mathcal{D}_0\phi\,\Delta[\hat{g}]\,Z_M[\hat{g}]\,e^{\frac{D-25}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]}\,\delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\ :e^{\alpha\phi}:_{\hat{g}} - A\right). \tag{2.13}$$

系はこのように計量場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ を持つ曲がった空間上の自由場 ϕ の理論に帰着した．この観点からすると宇宙項のくりこみを行わなければならないはずで，ここではくりこまれた宇宙項が以下のように表されると仮定した．

$$\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\ :e^{\alpha\phi}:_{\hat{g}}\ . \tag{2.14}$$

ここで，$\hat{g}_{\mu\nu}$ に関する正規積順序は

$$:e^{\alpha\phi(x)}:_{\hat{g}} = \lim_{\rho(y)\to\alpha\delta^{(2)}(y-x)}\left(e^{\int d^2y\rho(y)\phi(y)}\ e^{-\frac{1}{2}\int d^2y d^2z\rho(y)\rho(z)\zeta\log d_{\hat{g}}^2(y,z)}\right) \tag{2.15}$$

によって定義される．$d_{\hat{g}}(x,y)$ は x と y の間の測地的距離で，$\zeta\log d_{\hat{g}}(x,y)$ は ϕ の 2 点のグリーン関数の特異部分であり，ζ は

$$\zeta = \frac{12}{D-25} \tag{2.16}$$

のように，(2.13) のリューヴィル作用の前の係数より読み取れる．

(2.13) における定数 α は理論が

$$\hat{g}_{ab}(x) \ \to\ \hat{g}_{ab}(x)\,e^{\sigma(x)}, \tag{2.17}$$

$$\phi(x) \ \to\ \phi(x) - \sigma(x) \tag{2.18}$$

---

*1) 実は，(2.4) と異なり，(2.7) が複雑であるため，$\mathcal{D}_1\phi$ については直接 ϕ 依存性を (2.10) のように導出するのは難しいが，ここでの議論は以下のように精密化される．$\mathcal{D}_1\phi = \mathcal{D}_0\phi\exp\left[\frac{1}{48\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left(\frac{a}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + b\hat{R}\phi\right)\right]$ と仮定するのが自然で（こうでないと無矛盾性の条件を満たすのが難しい），(2.17) と (2.18) の無矛盾性の条件についての本文の議論を一般化することにより $a=b=1$ と決まり，結局 (2.10) に帰着する．

という変換のもとで不変であるべしという要請から決まる．この不変性はもともと理論は $g_{ab}(x)$ で書けていて，この変換のもとで $g_{ab}(x) = \hat{g}_{ab}(x)e^{\phi(x)}$ は不変であることに由来する．この変換のもと諸量は以下のように変換される．

$$\sqrt{\hat{g}} \;\to\; \sqrt{\hat{g}}e^{\sigma}, \tag{2.19}$$

$$\hat{R} \;\to\; e^{-\sigma}(\hat{R} - \nabla^2\sigma), \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} S_L[\hat{g};\phi] \;\to\; & \int d^2x\sqrt{\hat{g}}\,\Big(\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a(\phi-\sigma)\partial_b(\phi-\sigma) \\ & \qquad +(\hat{R}-\nabla^2\sigma)(\phi-\sigma)\Big) \\ & = S_L[\hat{g};\phi] - S_L[\hat{g};\sigma], \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\Delta_{FP}[\hat{g}] \;\to\; \Delta_{FP}[\hat{g}e^{\sigma}] = \Delta_{FP}[\hat{g}]\,e^{-\frac{26}{48\pi}S_L[\hat{g};\sigma]}, \tag{2.22}$$

$$Z_M[\hat{g}] \;\to\; Z_M[\hat{g}e^{\sigma}] = Z_M[\hat{g}]\,e^{\frac{D}{48\pi}S_L[\hat{g};\sigma]}, \tag{2.23}$$

$$\mathcal{D}_0\phi \;\to\; \mathcal{D}_0\phi\,e^{\frac{1}{48\pi}S_L[\hat{g};\sigma]}. \tag{2.24}$$

したがって，

$$\int \mathcal{D}_0\phi\,\Delta_{FP}[\hat{g}]\,Z_M[\hat{g}]\,e^{\frac{25-D}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]} \tag{2.25}$$

の組み合わせは不変である．これは (2.14) そのものが不変であることを意味する．y と z が非常に近いとき，$d^2_{\hat{g}}(y,z) \to d^2_{\hat{g}}(y,z)\,e^{\sigma(z)}$ であることに注意すると，これは定数 α についての次の方程式が成り立つことを要請することと等価である [*2)]．

$$\alpha + \frac{6}{D-25}\alpha^2 = 1. \tag{2.26}$$

これは

$$\alpha = \frac{25 - D \pm \sqrt{(1-D)(25-D)}}{12} \tag{2.27}$$

の 2 つの解を持つが，$D \to -\infty$ の古典極限でくりこみがない，すなわち $\alpha = 1$ に帰着するべきであることから，ここでは $-$ 符号を取らなければならないことがわかる．$D \to -\infty$ が古典極限に相当することは，この極限で (2.13) におけるリューヴィル作用の前の係数が負の無限大に発散することよりわかる．

結局，定数 α の値は

$$\alpha = \frac{25 - D - \sqrt{(1-D)(25-D)}}{12} \tag{2.28}$$

である．世界面の面積を固定した分配和 $Z(A)$ は (2.13) で α をこの値にとったものに帰着した．これは計量場 $\hat{g}_{ab}$ をもつ 2 次元の曲がった空間上の自由場 ϕ に関する経路積分になっている．

---

*2)　(2.15) の左辺が (1,1) 演算子であることを要請することとも等価である．

分配和 $Z(A)$ の A 依存性は正確に求まる．まず，ϕ を

$$\phi \;\to\; \phi + \frac{1}{\alpha}\log A \tag{2.29}$$

のように定数だけずらしてみる．このもとで

$$\mathcal{D}_0\phi \;\to\; \mathcal{D}_0\phi, \tag{2.30}$$

$$S_L[\hat{g};\phi] \;\to\; S_L[\hat{g};\phi] + \frac{1}{\alpha}\log A\cdot 4\pi\chi, \tag{2.31}$$

$$\int d^2x\sqrt{\hat{g}} : e^{\alpha\phi} :_{\hat{g}} \;\to\; A\int d^2x\sqrt{\hat{g}} : e^{\alpha\phi} :_{\hat{g}} \tag{2.32}$$

となる．ここで，χ は 2 次元多様体のオイラー数で

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\,\hat{R} \tag{2.33}$$

で与えられる．(2.32) より (2.13) で与えられる $Z(A)$ の A 依存性は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} Z(A) &= \int d\tau\int\mathcal{D}_0\phi\,\Delta[\hat{g}]\,Z_M[\hat{g}]\,e^{\frac{D-25}{48\pi}S_L[\hat{g};\phi]}\,e^{\frac{D-25}{48\pi}\frac{1}{\alpha}\log A\cdot 4\pi\chi} \\ &\qquad\qquad \times A^{-1}\,\delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\ : e^{\alpha\phi} :_{\hat{g}} -1\right) \\ &= Z(A=1)\,A^{-b\frac{\chi}{2}-1}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

ここで，b は

$$b = \frac{25-D+\sqrt{(1-D)(25-D)}}{12} \tag{2.35}$$

で与えられる．宇宙項定数の関数としての分配関数を得るために，これをラプラス変換して

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^\infty dA\,e^{-tA}Z(A) \\ &\sim \int^\infty dA\,e^{-tA}A^{-b\frac{\chi}{2}-1} \\ &\propto t^{b\frac{\chi}{2}}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

b は $D<1$ のとき D の単調減少関数で，$D=1$ のとき $b=2$ である．$1<D<25$ で虚数になるが，これは系の不安定性を示している [11]．これを通常 **$D=1$ の壁 ($D=1$ barrier)** と呼んでいる．$D=25$ のときは，コンフォーマルモード ϕ と 25 個の X^i で 2 臨界次元（26 次元）の弦に対応する．$D>25$ のときは，(2.13) でリューヴィル作用の前の係数が正になり経路積分は定義されない．

2.2 ランダム単体分割と行列模型

ここでは，弦理論を表す最も簡単な行列模型として，**1** 行列模型を考えよう．後で見るように，2.1 節の $D=0$ の場合に相当する模型になっている．

系の分配関数は以下で与えられる．

$$Z = \int dM\, e^{-N\mathrm{tr}V(M)}. \tag{2.37}$$

ここで，M は $N \times N$ のエルミート行列であり，

$$V(M) = \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{3}gM^3 \tag{2.38}$$

である．作用 $N\mathrm{tr}V(M)$ は $U(N)$ 変換 $M \to \Upsilon^\dagger M \Upsilon$ のもとで不変である．ここで Υ は $U(N)$ 行列である．積分測度 $\int dM$ は次の $U(N)$ 不変なノルム

$$\begin{aligned} ||dM||^2 &= \mathrm{tr}(dM)^2 \\ &= \sum_{i,j} dM_{ij}dM_{ji} \\ &= \sum_i (dM_{ii})^2 + 2\sum_{i>j}((d\mathrm{Re}M_{ij})^2 + (d\mathrm{Im}M^{ij})^2) \end{aligned} \tag{2.39}$$

より定義される．これから計量を読み取って $\int dM$ を具体的に書くと

$$\int dM = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \int \prod_i dM_{ii} \prod_{i>j} d\mathrm{Re}M_{ij}d\mathrm{Im}M_{ij} \tag{2.40}$$

となる [*3)]．これは定義より $U(N)$ 不変な積分測度である．

この模型の摂動論をつくる．(2.37) と (2.38) と (2.39) と

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}M^2 = \frac{1}{2}\sum_i (M_{ii})^2 + \sum_{i>j}((\mathrm{Re}M_{ij})^2 + (\mathrm{Im}M_{ij})^2) \tag{2.41}$$

であることより，プロパゲーターは次のように読み取れる（図 2.2）．

$$\langle M_{ij}M_{kl}\rangle = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{2.42}$$

ヴァーテックス（図 2.3）は

$$Ng\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} \tag{2.43}$$

で与えられる．

真空ダイアグラムは図 2.4 のようになる．図にあるようにこのダイアグラムの双対図形を考えよう．すなわち，各インデックスループを 3 角形の頂点，各プロパゲーターを 3 角形の辺に対応させ，各ヴァーテックスを 3 角形の面に対応させる．そうすると，閉じた 2 次元面の 3 角形分割が得られる．各 3 角形の

*3)　(B.9) と (B.10) の議論を参照.

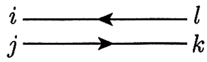


図 2.2　プロパゲーター.

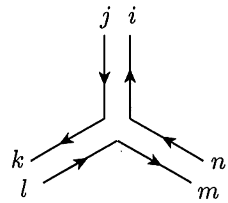


図 2.3　ヴァーテックス.

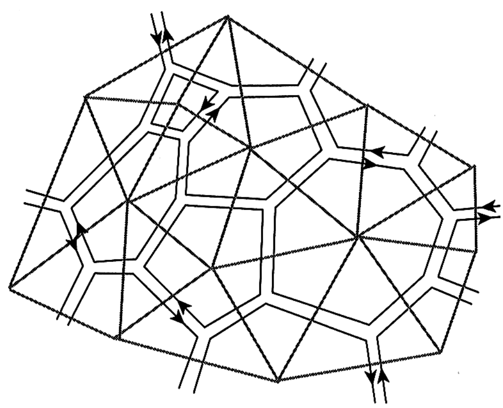


図 2.4　ランダム単体分割.

形状はダイアグラムからは指定されず，正 3 角形による分割と見なせる．エルミート行列の模型では図 2.2 に見られるように，プロパゲーターに自然に矢印がつくため，向き付け可能な 2 次元面の単体分割になる．ダイアグラムが 1 つ与えられると，3 角形分割が 1 つ決まり，ダイアグラムを足し上げるということは，あらゆる 3 角形分割の仕方について足し上げることになる．一般に多様体を単体分割し，そのあらゆる分割の仕方について足し上げることを，**ランダム単体分割**あるいは**動的単体分割**と呼ぶ．したがって，行列模型の摂動展開は 2 次元面のランダム単体分割を実現すると言える [*4)]．

*4)　今，曲率は頂点に集中している．1 つの頂点に 5 個以下の 3 角形が集まっているとき，その点での曲率は正，6 個のときは曲率はゼロ，7 個以上のときは曲率は負であり，曲率は離散的な値をとる．連続極限ではこれがなめされて（多くの頂点での曲率が平均化されて），連続的な値をとることが期待される．

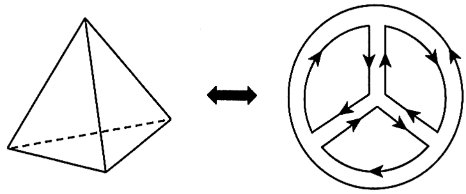


図 2.5　球面の単体分割（正 4 面体）と対応するファインマンダイアグラム．

さて，単体分割で得られる 2 次元面のトポロジーとファインマンダイアグラムの N 依存性の関係を見てみよう．今の場合にあるファインマンダイアグラムのインデックスループの数を V としよう．これは上に述べた対応から対応する 3 角形分割の 3 角形の頂点の数に等しい．同様に，プロパゲーターの数を E，バーテックスの数を F とすると，それぞれ 3 角形の辺の数，面の数に等しい．インデックスループは因子 N を出し，(2.42) から各プロパゲーターは $1/N$ を与え，(2.43) から各バーテックスは gN を与える．したがって，このファインマンダイアグラムは

$$g^F N^{V-E+F} = g^F N^{\chi} = g^F N^{2-2h} \tag{2.44}$$

に比例する．ここで，第 1 章と同じように，$\chi = 2 - 2h$（χ はオイラー数，h はハンドル数）であり，単体分割の理論におけるオイラー数と単体の数の関係の 2 次元版 $\chi = V - E + F$ を使った．これからわかることは，g を固定すると，$1/N^2$ による展開がハンドル数による展開に対応するということである．g^2 はゲージ理論のトフーフト展開における**トフーフト結合定数**に相当する．簡単な例として，球面 ($h = 0$) の単体分割に相当する正 4 面体と対応するファインマンダイアグラムを図 2.5 に示す．なお，球面の単体分割に対応するファインマンダイアグラムは $1/N^2$ 展開のリーディングの寄与を与えるが，これらのダイアグラムは平面上に書けるので，**プラナーダイアグラム**と呼ばれる *5)．後に精密な議論を必要とするが，素朴に $g_{st} \sim 1/N$ の対応により，行列模型の $1/N^2$ 展開が弦理論における g_{st}^2 展開 (1.10) に対応してもよさそうであることがわかる．

結局，連結真空ダイアグラムの和で与えられる自由エネルギー W は

$$W = \log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} \sum_{S_h} \frac{1}{G(S_h)} g^F \tag{2.45}$$

で与えられる．ここで S_h はハンドル数が h の閉じた向き付け可能な 2 次元面の単体分割の仕方であり，$G(S_h)$ はそれに対応するファインマン図の対称性因子である．素朴なランダム単体分割とこの対称性因子の分だけずれるが，連続

*5)　ゲージ理論における**トフーフト極限**はトフーフト結合定数を固定して $N \to \infty$ 極限をとる．このとき，プラナーダイアグラムのみが効くことになるため，トフーフト極限を**プラナー極限**とも言う．

極限を考えるときはこの差はなくなる．連続極限は3角形の数 F が大きい単体分割を支配的にして1枚の3角形の面積をゼロにもっていくことにより実現されるが，このとき対応するファインマン図のヴァーテックスの数が大きくなり対称性を持ったファインマン図の数は相対的に非常に小さくなるからである．さて，(2.45) より W が g の関数として特異的な振る舞いを示したとき，g を収束半径 g_c に近づけることで連続極限が達成されることがわかる．なぜなら，このとき (2.45) において g の高い冪の項が支配的になっていて，それは3角形の枚数が多い単体分割が支配的になることを意味するからである．

このとき，単体分割の仕方についての足し上げが2次元の計量場についての経路積分に対応することが期待でき，後でこれが正しいことを確かめる．特に，一般座標変換不変性がランダム性によって保証されるのは特筆に値する．すなわち，(少なくとも2次元では) ランダム単体分割は一般座標不変性を保つ正則化になっている．なお，W は連結した2次元面を与えるので，その $1/N^2$ 展開の各項の連続極限がリューヴィル理論で世界面のトポロジーを固定した分配関数に対応する．今考えている単体分割では世界面上に物質場が導入されていないので，$D=0$ のリューヴィル理論に対応することが予想されるが実際そうなっている．また，3角形1枚の面積を a^2 とし，$g=g_c e^{-a^2 t}$ として $a\to 0$ の極限をとると，(2.44) にあるダイアグラムの g 依存性は

$$g^F = e^{-(-\frac{\log g_c}{a^2}+t)Fa^2} \tag{2.46}$$

となる．Fa^2 が2次元面の面積であることから，この t がリューヴィル理論での繰り込まれた宇宙項定数で，$-\frac{\log g_c}{a^2}+t$ が裸の宇宙項定数であることがわかる．こうして弦の世界面が行列模型から出現する．

(2.38) の代わりに

$$V(M)=\frac{1}{2}M^2-\frac{1}{4}gM^4 \tag{2.47}$$

を考えると3角形分割ではなくて，4角形分割を考えることになる．上の議論はすべて並行に成り立つ．一般に n 次の相互作用項を考えると n 角形分割を考えることになる．連続極限ではユニヴァーサリティから3角形分割でも4角形分割でも n 角形分割でも答えは同じになることが期待されるが，実際そうなっていることが知られている．(2.38) のときより (2.47) のときのほうが解析がしやすいので以下では (2.47) を考えることにする．

2.3 直交多項式の方法

M に関する積分 (2.37) を実行するために，まずそれを M の固有値についての積分に帰着させる．M はエルミート行列だから，ユニタリー行列 U を用いて $M = U^\dagger \Lambda U$ のように対角化できる．ここで，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N)$ である．付録 B で示されているように，

$$\int dM = \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{i>j} d\mathrm{Re}\Omega_{ij} d\mathrm{Im}\Omega_{ij} 2^{(N-1)/2} \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \tag{2.48}$$

となる．ここで，$d\Omega = dUU^\dagger$ である．$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$ はいわゆる van der Monde 行列式の 2 乗である．この積分測度は定義より $U(N)$ 不変である．

分配関数 (2.37) は以下のように計算される．

$$Z = \int dM e^{-\mathrm{tr}V(M)} \tag{2.49}$$

$$= 2^{(N-1)/2} \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{i>j} d\mathrm{Re}\Omega_{ij} d\mathrm{Im}\Omega_{ij} \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-N\sum_i V(\lambda_i)}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-N\sum_i V(\lambda_i)}. \tag{2.50}$$

となる．ここで，$\prod_{i>j} d\mathrm{Re}\Omega_{ij} d\mathrm{Im}\Omega_{ij}$ はゲージ体積を与え，これは重要でない定数なので $2^{(N-1)/2}$ とともに最後の行で無視した．このようにして,「角度部分」を先に積分し，N^2 重積分を固有値だけの N 重積分とすることができた．$U(N)$ 不変なオブザーバブルの相関関数についても明らかに同じことが言える．

(2.50) を計算するために**直交多項式** $P_n(\lambda)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を導入する．$P_n(\lambda)$ は λ の n 次の多項式で λ^n の係数は 1，すなわち

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{2.51}$$

の形をとるとする．そして，直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-NV(\lambda)} P_n(\lambda) P_m(\lambda) = h_n \delta_{nm} \tag{2.52}$$

を満たしているとする．

さて，(2.50) に現われている **van der Monde 行列式**は次のように書ける．

$$\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \ldots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix}. \tag{2.53}$$

行列式のある列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変らないから，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i>j}'(\lambda_i - \lambda_j) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & P_{N-1}(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & P_{N-1}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \dots & P_{N-1}(\lambda_N) \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{vmatrix} P_0(\lambda_1) & P_1(\lambda_1) & \dots & P_{N-1}(\lambda_1) \\ P_0(\lambda_2) & P_1(\lambda_2) & \dots & P_{N-1}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(\lambda_N) & P_1(\lambda_N) & \dots & P_{N-1}(\lambda_N) \end{vmatrix} \\
&= \epsilon^{n_1 n_2 \dots n_N} P_{n_1}(\lambda_1) P_{n_2}(\lambda_2) \dots P_{n_N}(\lambda_N).
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

ここで，$\epsilon^{n_1 n_2 \dots n_N}$ は完全反対称で $\epsilon^{01 \cdots N-1} = 1$ である．

したがって，(2.50) は次のように表される．

$$
Z = \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \left(\epsilon^{n_1 n_2 \dots n_N} P_{n_1}(\lambda_1) P_{n_2}(\lambda_2) \dots P_{n_N}(\lambda_N)\right)^2 e^{-N \sum_i V(\lambda_i)}. \tag{2.55}
$$

ここで例えば $P_0(\lambda_1)P_1(\lambda_2)\dots P_{N-1}(\lambda_N) \times P_1(\lambda_1)P_0(\lambda_2)\dots P_{N-1}(\lambda_N)$ という形の項は，直交関係 $\int d\lambda_1 P_0(\lambda_1)P_1(\lambda_1)e^{-V(\lambda_1)} = 0$ より，積分後に消える．このように $(N!)^2$ 個の項のうち交叉項は消えて $N!$ 個の自乗項のみ積分後に残る．結局，(2.52) を使うと (2.55) は

$$
Z = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n \tag{2.56}
$$

となる．あるいは

$$
r_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} \tag{2.57}
$$

と定義すれば

$$
Z = N!\, h_0^N \prod_{n=1}^{N-1} r_n^{N-n} \tag{2.58}
$$

となる．このように Z を求めることは，h_n あるいは r_n を求めることに帰着した．

r_n に対する漸化式が以下のように導かれる．$P_n(\lambda)$ は λ の多項式がつくるベクトル空間の完全系を成しているので，$n+1$ 次の多項式である $\lambda P_n(\lambda)$ は

$$\lambda P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(\lambda) \tag{2.59}$$

のように展開できる．明らかに $b_{n+1} = 1$ である．係数 b_i $(i = 0, 1, \cdots n)$ は

$$b_i = \frac{1}{h_i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, P_i(\lambda) \lambda P_n(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} \tag{2.60}$$

で与えられる．V が偶関数のとき $b_n = 0$ である．また，$i < n-1$ に対して $\lambda P_i(\lambda)$ は $n-1$ 次以下の多項式であるから $P_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ を用いて展開できる．よって，$i < n-1$ に対して $b_i = 0$ である．b_{n-1} については，$\lambda P_{n-1}(\lambda)$ は $\lambda P_{n-1}(\lambda) = P_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(\lambda)$ のように展開できるので，(2.60) より

$$b_{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (P_n(\lambda))^2\, e^{-NV(\lambda)} = \frac{h_n}{h_{n-1}} = r_n \tag{2.61}$$

と求まる．結局，

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + r_n P_{n-1}(\lambda) \tag{2.62}$$

となる．次に $P_n'(\lambda) \lambda P_n(\lambda)$ の組み合わせに注目する．まず $\lambda P_n'(\lambda) = n P_n(\lambda) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i P_i(\lambda)$ と展開できることより

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, P_n'(\lambda) \lambda P_n(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} = n h_n \tag{2.63}$$

である．また (2.62) を使い，部分積分を行うことにより

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, P_n'(\lambda) \lambda P_n(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, P_n'(\lambda) r_n P_{n-1}(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} \\
&= r_n \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, N V'(\lambda) P_n(\lambda) P_{n-1}(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

が得られる．ここで $P_{n-1}'(\lambda)$ は $n-2$ 次の多項式で $P_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$ で展開できることより導かれる関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, P_n(\lambda) P_{n-1}'(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} = 0 \tag{2.65}$$

を用いた．(2.63) と (2.64) より

$$n h_n = r_n \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, N V'(\lambda) P_n(\lambda) P_{n-1}(\lambda)\, e^{-NV(\lambda)} \tag{2.66}$$

が成り立つ．これが r_n に対する漸化式を求めるための基本式である．(2.66) の右辺を計算するには $V'(\lambda) P_n(\lambda)$ に (2.62) を繰り返し使い，$P_{n-1}(\lambda)$ に比例する項のみ拾えばよい．$V(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{g}{4}\lambda^4$ のときは

$$
\begin{aligned}
NV'(\lambda)P_n(\lambda) &= N(\lambda - g\lambda^3)P_n(\lambda) \\
&\sim N(r_n - g(r_{n+1}r_n + r_n^2 + r_n r_{n-1}))
\end{aligned} \tag{2.67}
$$

より，(2.66) は

$$
\frac{n}{N} = r_n - g r_n (r_{n+1} + r_n + r_{n-1}) \tag{2.68}
$$

となる．この漸化式を以下使っていく．

2.4 球面極限

この節では $N \to \infty$ を単純にとる極限をとる．このとき $W = \log Z$ においては N^2 に比例する球面の寄与が支配的になる [*6]．(2.58) より

$$
\frac{1}{N^2}W = \frac{1}{N^2}\log N! + \frac{1}{N}\log h_0 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}(1 - \frac{n}{N})\log r_n. \tag{2.69}
$$

第 1 項は定数であり，第 2 項は模型の詳細による非ユニヴァーサル部分で，いずれも $g \to g_c$ で特異性を示さず，t に依存しない．これらは以下で落とす．W は連結した世界面の寄与を表す．$N \to \infty$ 極限では

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{N} &= \xi \ \ (0 \leq \xi \leq 1), \\
r(\xi) &\equiv r_n, \\
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} &= \int_0^1 d\xi
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

とすることができる．よって

$$
\frac{1}{N^2}W = \int_0^1 d\xi (1-\xi)\log r(\xi) \tag{2.71}
$$

となる．

r_n に対する漸化式 (2.68) は

$$
\begin{aligned}
\xi &= r(\xi) - g r(\xi)\left(r\left(\xi + \frac{1}{N}\right) + r(\xi) + r\left(\xi - \frac{1}{N}\right)\right) \\
&= r(\xi) - 3g r(\xi)^2
\end{aligned} \tag{2.72}
$$

に帰着する．これは

$$
r(\xi) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12g\xi}}{6g} \tag{2.73}
$$

とただちに解ける．ここで，$g \to 0$ の極限が存在するようにマイナス符号をとる．これから g が $\frac{1}{12}$ より大きいと $0 \leq \xi \leq 1$ の全域では，$r(\xi)$ の根号の中が

*6)　g を固定して，$N \to \infty$ の極限をとっており，ゲージ理論ではトフーフト極限（プラナー極限）をとっていることに相当する（2.2 節の脚注 4）を参照）．

正にならなくなることがわかる．したがって g の臨界値 g_c は $\frac{1}{12}$ である．

(2.73) を (2.71) に代入して，log を展開すると，

$$\frac{1}{N^2}W = \frac{1}{2}\log\frac{1}{6g} - \int_0^1 d\xi(1-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-12g\xi)^{\frac{n}{2}} \tag{2.74}$$

となる．ここで，右辺第 2 項を部分積分することにより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^2}W =& \frac{1}{2}\log\frac{1}{6g} - \frac{1}{6g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{36g^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)} \\ &- \frac{1}{36g^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}(1-12g)^{\frac{n}{2}+2}\end{aligned} \tag{2.75}$$

となる．右辺第 1 項～第 3 項は $g \to g_c$ について特異性を示さない項であり，単体分割の仕方による非ユニヴァーサルな寄与しか与えない．第 4 項で最も特異な項を与える $n=1$ の項から連続極限で効くユニヴァーサルな寄与が得られる．単体分割における 1 つの正方形の面積を a^2，宇宙項定数を t とすると，2.2 節の議論より連続極限は

$$g = g_c\, e^{-a^2 t} \tag{2.76}$$

とおいて $a \to 0$ の極限をとることに相当する．このとき，$g_c - g \sim g_c a^2 t$ で

$$\frac{1}{N^2}W = const. + const.a^2 t + const.a^4 t^2 - \frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}}a^5 + \mathcal{O}(a^6). \tag{2.77}$$

第 4 項が (2.75) の第 4 項の $n=1$ 項から由来する連続極限で効くユニヴァーサルな寄与である．よって，

$$\frac{1}{N^2}W_{univ} \sim a^5 t^{\frac{5}{2}} \tag{2.78}$$

である．これはリューヴィル理論から求めた (2.36) で $D=0$，$\chi=2$ (球面) としたものに確かに一致している．

2.5 ダブルスケーリング極限

前節では sphere の寄与のみが残る連続極限を考えたが，あらゆるトポロジーの世界面からの寄与を取り入れるにはどうすればよいだろうか．それには $1/N^2$ の寄与を系統的に取り入れていく必要がある．その処方を探るために (2.68) を $1/N$ 補正を残してもう一度解析してみる．(2.68) は

$$\begin{aligned}\xi &= r(\xi) - gr(\xi)\left(r\left(\xi+\frac{1}{N}\right) + r(\xi) + r\left(\xi-\frac{1}{N}\right)\right) \\ &= r(\xi)(1-3gr(\xi)) - gr(\xi)\left(r\left(\xi+\frac{1}{N}\right) - 2r(\xi) + r\left(\xi-\frac{1}{N}\right)\right) \\ &= r(\xi)(1-3gr(\xi)) - 2gr(\xi)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)!N^{2m}}r^{(2m)}(\xi)\end{aligned} \tag{2.79}$$

と書ける．ここで $r^{(2m)}(\xi)$ は $r(\xi)$ の ξ についての $2m$ 階微分である．(2.73) の $r(\xi)$ を $r_0(\xi)$ と書き，

$$r(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2l}} r_l(\xi) \tag{2.80}$$

と展開すると，(2.79) は $r_l(\xi)$ を $r_k(\xi)$ $(l < k)$ とその ξ 微分で解くための漸化式になっている．(2.79) の $1/N^{2l}$ $(l \geq 1)$ の係数を取り出すと

$$\begin{aligned} 0 = r_l(\xi) - 3g \sum_{k=0}^{l} r_k(\xi) r_{l-k}(\xi) \\ -2g \sum_{k+j \leq l-1} \frac{1}{(2(l-k-j))!} r_j(\xi) r_k^{(2(l-k-j))}(\xi). \end{aligned} \tag{2.81}$$

これより

$$r_l(\xi) = \frac{3g \sum_{k=1}^{l-1} r_k(\xi) r_{l-k}(\xi) + 2g \sum_{k+j \leq l-1} \frac{1}{(2(l-k-j))!} r_j(\xi) r_k^{(2(l-k-j))}(\xi)}{1 - 6g r_0(\xi)} \tag{2.82}$$

と解ける．

(2.82) より，$l \leq 1$ のとき，

$$r_l(\xi) = const.(g_c - g\xi)^{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}l} (1 + \mathcal{O}(g_c - g\xi)) \tag{2.83}$$

であることがわかる．実際，(2.82) より

$$r_1 = \frac{g r_0(\xi) r_0^{(2)}(\xi)}{1 - 6g r_0(\xi)} \tag{2.84}$$

であるが，(2.73) より $1 - 6gr_0(\xi) = const.(g_c - g\xi)^{\frac{1}{2}}$，$r_0^{(2)}(\xi) = const.(g_c - g\xi)^{-\frac{3}{2}}$ であることに注意すると $l = 1$ については主張は成り立っていることがわかる．$l \leq m$ まで成り立っているとすると $l = m + 1$ についても成り立つこともすぐわかる．よって帰納法により主張は証明される．結局，$1/N^2$ 展開をすると

$$r(\xi) = \frac{1}{6g} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2l}} q_l (g_c - g\xi)^{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}l} (1 + \mathcal{O}(g_c - g\xi)) \tag{2.85}$$

となっている．

この結果はすべてのトポロジーの寄与を連続極限で取り入れるには

$$\begin{aligned} g &= g_c e^{-a^2 t}, \\ N &= \sqrt{2} g_{st}^{-1} a^{-\frac{5}{2}}, \\ a &\to 0 \end{aligned} \tag{2.86}$$

の極限を取ればいいことを示唆している．ここでは t と g_{st} は固定されてい

て，これは $N \to \infty$ の極限であるが，N を大きくする速さを $a \to 0$ の速さと連動させている．言い換えると，$(g_c - g)^{\frac{5}{2}} N^2 = 2 g_c^{\frac{5}{2}} t^{\frac{5}{2}} g_{st}^{-2}$ を一定に保って，$g \to g_c$，$N \to \infty$ の極限と取るということである．これを**ダブルスケーリング極限 (double scaling limit)** という [12]~[14]．g_{st} は弦の結合定数と解釈される．実際，この極限のもと (2.71) を使って W の特異的な部分からの寄与は

$$
\begin{aligned}
W &= N^2 \int_0^1 d\xi (1-\xi) \log r(\xi) \\
&= N^2 \int_0^1 d\xi (1-\xi) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2l}} p_l (g_c - g\xi)^{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}l} \\
&\sim \sum_{l=0}^{\infty} s_l N^{2-2l} (g_c - g)^{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}l} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} s_l (g_c^{-\frac{5}{2}} t^{-\frac{5}{2}} g_{st}^2)^{l-1}
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

のように計算される．ここで，p_l と s_l は l に依存した定数である．

この 2 重スケール極限は以下のように系統的に実行される．(2.85) と (2.86) から，

$$
r(\xi) = \frac{1}{6g} + 2af(x), \tag{2.88}
$$

$$
\xi = 1 + a^2 (t - x) \tag{2.89}
$$

とすればよいことがわかる．これらと (2.86) を (2.79) に代入し，a の最低次（2 次である）の項を拾うと，

$$
f(x)^2 + \frac{1}{6} g_{st}^2 f''(x) = x \tag{2.90}
$$

を得る．

さて，この関数 $f(x)$ は次の意味を持つ *7)．

$$
\frac{d^2}{dt^2} W = 2 g_{st}^{-2} f(t). \tag{2.91}
$$

実際，

$$
\begin{aligned}
W &= 2N^2 \int_0^1 d\xi (1-\xi) \log r(\xi) \\
&= 2 g_{st}^{-2} \int_t^{\infty} dx (x - t) \left(\frac{1}{a} \log \frac{1}{6g} + f(x) \right)
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

であるから，

$$
\frac{dW}{dt} = -2 g_{st}^{-2} \int_t^{\infty} dx \left(\frac{1}{a} \log \frac{1}{6g} + f(x) \right) \tag{2.93}
$$

であり，これから非ユニヴァーサルな部分を除いて (2.91) を得る．

*7) t を温度と思えば，$f(t)$ は比熱に比例する．

$f(t)$ は (2.90) より

$$f(t)^2 + \frac{1}{6} g_{st}^2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = t \tag{2.94}$$

に従う．これを**ストリング方程式**と呼ぶことがある．これは数学で **Painlevé I 方程式**と呼ばれるものである．これは非臨界次元 ($D = 0$) の弦理論の非摂動論的ダイナミクスを決定する方程式の 1 つと考えられる．これについては次節で述べることにして，ここでは (2.94) を弦結合定数 g_{st} について摂動論的に解く．(2.91) からわかるように $f(t)$ は分配関数の log の宇宙項定数についての 2 階微分であるから，リューヴィル理論で得た結果と比較できるはずである．g_{st} の 0 次では

$$f(t) = \pm\sqrt{t} \tag{2.95}$$

である．

$$f(t) = \pm\sqrt{t} + \sum_{h=1}^{\infty} g_{st}^{2h} f_h(t) \tag{2.96}$$

と展開すると

$$f_1(t) = \frac{1}{48} t^{-2}, \quad f_2 = \mp \frac{49}{4608} t^{-\frac{9}{2}}, \cdots \tag{2.97}$$

と求まっていく．$f_h \ \ (h \geq 1)$ は $t^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}h}$ に比例し，(2.95) で－符号をとれば $f_h \ \ (h \geq 1)$ の係数は正になる．よって－符号を採用すべきである．こうして

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} W &= 2 g_{st}^{-2} f(t) \\ &= -2 g_{st}^{-2} t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} t^{-2} + \frac{49}{2304} g_{st}^2 t^{-\frac{9}{2}} + \cdots \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} u_h g_{st}^{2h-2} t^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}h} \end{aligned} \tag{2.98}$$

という結果を得る *8)．ここで，u_h は h に依存した定数である．この各項はハンドル数 h の世界面の寄与である．各項をリューヴィル理論で得られた結果 (2.36) で $D = 0$ とおいたものを t で 2 階微分したものと比較すると確かに一致している．ここでは分配和についての比較のみ行っているが，相関関数についてもリューヴィル理論での計算は一般には困難であるが，いくつかの相関関数について 2 つの理論の一致が確認されている．このように行列模型は非臨界次元の弦理論の摂動論であるリューヴィル理論を再現する．

---

*8)　(2.78) で，係数まで求めると，$W_{univ} = -\frac{4}{15} N^2 a^5$ だが，これに (2.86) を適用すると，(2.98) の初項を t で 2 回積分したものに確かに一致することに注意したい．

2.6 行列模型からみる弦理論の非摂動効果

(2.98) は収束しないし，ボレル和もとれない．(2.94) の g_{st} の展開でない解が欲しい．それが弦理論の非摂動的な自由エネルギーのはずである．(2.94) は 2 階の微分方程式だから解を決めるには 2 つの初期条件が必要である．ひとつの条件は前節で述べた $t \to \infty$ のとき $f(t) \to -\sqrt{t}$ である．もう 1 つの条件も行列模型自身がユニヴァーサルに決めていることが知られている[15]．

ここでは，この問題には深く立ち入らず，(2.94) からわかる弦理論の非摂動効果の強さについて議論する[1]．今，(2.94) の解 $f(t)$ が摂動論パート $w(t)$ と非摂動論パート $z(t)$ に分けられたとする．すなわち

$$
\begin{aligned}
f(t) &= w(t) + z(t), \\
w(t) &= -\sqrt{t} + \frac{1}{48} g_{st}^2 t^{-2} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

これを (2.94) に代入すると

$$
2w(t)z(t) + z(t)^2 + \frac{1}{6} g_{st}^2 z''(t) = 0. \tag{2.100}
$$

ここで

$$
w(t)^2 + \frac{1}{6} g_{st}^2 w''(t) = t \tag{2.101}
$$

であることを使った．(2.100) は z が小さく t が大きいとき第 1 近似で

$$
z''(t) = \frac{12}{g_{st}^2} \sqrt{t} z(t) \tag{2.102}
$$

となる．これは g_{st} が小さいときに

$$
z(t) \sim e^{-\frac{8\sqrt{3}}{5 g_{st}} t^{\frac{5}{4}}} \tag{2.103}
$$

と振舞う[16],[17]．これは，1.1 節で見た D ブレーンによる弦理論の非摂動効果の形をしている．実際，exp の肩 $-\frac{8\sqrt{3}}{5g_{st}} t^{\frac{5}{4}}$ はリューヴィル理論（この場合は $D=0$）における D ブレーンである **ZZ** ブレーン[18] 上の円盤振幅に一致することが示されている[19]．

このように，1 行列模型模型は D ブレーンの効果，すわわち非摂動効果を含んだ $D = 0$ 非臨界次元弦の非摂動的定式化となっている．なお，2 つのエルミート行列からなる **2 行列模型**で適当に作用を微調整することにより，任意の (p, q) 極小共形場が 2 次元重力に結合した非臨界次元の弦理論をすべて表せることが知られている[20],[21]．なお，1 行列模型の範囲でも，作用を微調整することにより，$(p,q) = (2, 2k-1)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ の場合を表せる．また，行列が時間に依存した行列量子力学は中心電荷 1 の物質場が 2 次元重力に結合した場合を表す．これは，2.1 節で $D = 1$ としたものである．形式的には D 次元の行列場の理論を考えると，2 次元重力に結合した中心電荷 D の物質場を表せ

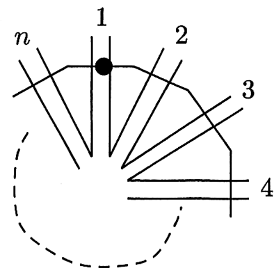


図 2.6　n 角形の印付きの穴を開ける演算子.

そうである．しかし，2.1 節で $D=1$ の壁について述べたが，対応して $D>1$ の場合は行列模型は解くことができず，対応もよくわからなくなる．

2.7 リゾルヴェント

この節では，以下で定義されるリゾルヴェント (**resolvent**) と呼ばれる量を考える．

$$R(z)=\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle. \tag{2.104}$$

これを $1/z$ で展開してみる．

$$R(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}(M^n)\right\rangle z^{-n-1}. \tag{2.105}$$

これより，$R(z)$ は $w_n=\frac{1}{N}\mathrm{tr}(M^n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ の期待値の生成関数であることがわかる．$N\times w_n$ は図 2.6 に見られるように，ランダム単体分割において n 角形の穴を開ける演算子である．今，n 角形の 1 辺に印がついている．n で割ると印がないものになる．対応して，生成関数は $R(z)$ を z で積分したもの

$$\tilde{R}(z)=\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\ln(z-M)\right\rangle \tag{2.106}$$

になる．

(2.104) と (2.106) において，$1/z$ を収束半径 $1/z_c$ にもっていくことによって，n 角形の n が大きいところが効くようになり，連続極限でそれぞれ印付きの境界がある世界面と印なしの境界がある世界面を表すことになる．世界面にハンドルがない場合はトポロジーは円盤になる．

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_c}e^{-a\zeta} \tag{2.107}$$

とすると，$l=na$ が境界の長さに対応し，ζ がくりこまれた境界の宇宙定数に対応する．

$N \times w_n$ の代わりに $N^2 \times w_n$ を考えると，n 角形の穴が開いているものでなく，n 角形を単体の 1 つとして含む閉じた面の単体分割とみなせる．これは，$N^2 \times w_n$ の N 依存性はハンドル数 h の世界面に対応するとき N^{2-2h} であり，したがって，$N \times w_n$ の N 依存性は N^{1-2h} であることを意味する．よって，オイラー数は境界が 1 つあるごとに 1 下がるから，境界がある場合にも N 依存性はオイラー数を χ とすると N^χ であることがわかる．ここで，ハンドル数を h，境界の数を b として，$\chi = 2 - 2h - b$ である．$R(z)$ と $\tilde{R}(z)$ の N 依存性は，全体を N で割っていることから N^{-2h} である．

N 依存性が N^χ で与えられることは，単体分割が非連結な世界面に対応する場合にも成立することがわかるだろう．例えば，円盤 2 個のオイラー数 $(= 2)$ はシリンダー（円環）のオイラー数 $(= 0)$ より 2 大きい．したがって，**次のラージ N 因子化 (large-N factorization)** に到達する．A, B, $C, \cdots$ をシングルトレースの演算子とすると，

$$\langle ABC \cdots \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle \langle C \rangle \cdots + (\text{初項に比べて } \mathcal{O}(1/N^2)) \tag{2.108}$$

である．これは，ラージ N のリーディングで相関関数は因子化することを意味する．ラージ N 因子化はラージ N ゲージ理論などラージ N 理論でトフーフト極限をとった場合の共通の性質である．以上の議論は 2.2 節と同じように摂動論に基づいているが，ラージ N 因子化は格子ゲージ理論での強結合展開でも示すことができ，普遍的に成立する性質と考えられている．

以下では，$R(z)$ をラージ N の初項 (N^0) を求める．このために，M の固有値密度 $\rho(x)$ を導入する．

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - \lambda_i). \tag{2.109}$$

$\rho(x)$ は定義より，次を満たす．

$$\int \rho(x) dx = 1. \tag{2.110}$$

固有値密度を用いると，$R(z)$ の N^0 項は

$$R(z) = \int \frac{\rho(y)}{z - y} dy \tag{2.111}$$

と表せる．

$a \leq x \leq b$ でのみ $\rho(x) \neq 0$ とすると，$R(z)$ の N^0 項は以下の性質を満たす．

(1) $R(z)$ は実軸上 $[a, b]$ にカットを持ち，それ以外では正則である．

(2) (2.110) より，$z \to \infty$ で

$$R(z) \to \frac{1}{z}. \tag{2.112}$$

(3) $\rho(x)$ は実であることより，$R(z)^* = R(z^*)$.

(4) 関係式（PV は主値を表す）

$$\frac{1}{x+i0-y} = PV\frac{1}{x-y} - i\pi\delta(x-y) \tag{2.113}$$

より，

$$\mathrm{Im}R(x+i0) = -\pi\rho(x). \tag{2.114}$$

$R(z)$ の N^0 項を求めるために，次の行列模型の **Schwinger-Dyson 方程式**を考える．

$$0 = \int dM \frac{\partial}{\partial M_{ij}}\left(\left(\frac{1}{N}\frac{1}{z-M}\right)_{ij} e^{-N\mathrm{tr}V(M)}\right). \tag{2.115}$$

ここで，

$$(z-M)_{kl}\left(\frac{1}{z-M}\right)_{lm} = \delta_{km} \tag{2.116}$$

から導かれる関係式

$$\frac{\partial}{\partial M_{ij}}\left(\frac{1}{z-M}\right)_{ij} = \left(\frac{1}{z-M}\right)_{ii}\left(\frac{1}{z-M}\right)_{jj} \tag{2.117}$$

を用いると，(2.115) は

$$\begin{aligned} 0 = &\int dM \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)e^{-N\mathrm{tr}V(M)} \\ &- \int dM \mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}V'(M)\right)e^{-N\mathrm{tr}V(M)}. \end{aligned} \tag{2.118}$$

分配関数で両辺を割って，期待値の間の関係式にすると，

$$\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}V'(M)\right)\right\rangle \tag{2.119}$$

となる．一般に，ウィルソンループに対する Schwinger-Dyson 方程式を**ループ方程式**というが，

$$\mathrm{tr}\frac{1}{z-M} = \int_0^\infty dl e^{-lz}\mathrm{tr}(e^{lM}) \tag{2.120}$$

の関係式から，(2.119) はウィルソンループ $\mathrm{tr}(e^{lM})$（l はループの長さ）に対する Schwinger-Dyson 方程式と見なせるので，しばしばループ方程式とよばれる．

さて，ラージ N の初項では (2.119) の左辺は因子化 (factorization) により $R(z)^2$ に等しい．右辺は

$$\begin{aligned} &V'(z)\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle + \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-M}(V'(M)-V'(z))\right)\right\rangle \\ &= R(z)V'(z) + \frac{1}{N}\sum_i \frac{V'(\lambda_i)-V'(z)}{z-\lambda_i} \end{aligned} \tag{2.121}$$

と変形される．ここで，

$$\frac{1}{N}\sum_i \frac{V'(\lambda_i)-V'(z)}{z-\lambda_i} \equiv \frac{1}{4}p(z) \tag{2.122}$$

は，ポテンシャル $V(z)$ が k 次式のとき $k-2$ 次式になる．(2.119) は

$$R(z)^2 - V'(z)R(z) - \frac{1}{4}p(z) = 0 \tag{2.123}$$

と書ける．これは，

$$R(z) = \frac{1}{2}(V'(z) \pm \sqrt{V'(z)^2 + p(z)}) \tag{2.124}$$

と解けるが，$x \to \infty$ のとき，$V'(x) < 0$ であるとすると，$R(z)$ の性質 (2) より符号はプラスをとる．

具体的に以下ではポテンシャルとして (2.47) を考え，

$$p(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma \tag{2.125}$$

とおく．ここで，

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{2}(x - gx^3 + \sqrt{(x-gx^3)^2 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}) \\ &= \frac{\alpha}{4g}\frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned} \tag{2.126}$$

と $R(z)$ の性質 (2) より，

$$\alpha = 4g \tag{2.127}$$

と決まる．まとめると，

$$R(x) = \frac{1}{2}(x - gx^3) + W_0(x), \tag{2.128}$$

$$W_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x-gx^3)^2 + 4gx^2 + \beta x + \gamma} \tag{2.129}$$

となる．

ポテンシャルが偶関数なので，$\rho(x)$ も偶関数と仮定できる．よって，$x_1 > 0$ として，

$$a = -x_1, \quad b = x_1 \tag{2.130}$$

とおく．ここで，$R(z)$ の性質 (1)，(3)，(4) より，x_0 を実数として，

$$W_0(x)^2 = \frac{1}{4}g^2(x^2 - x_0^2)^2(x+x_1)(x-x_1) \tag{2.131}$$

とおける．(2.129) と (2.131) を比較することにより，

$$\beta = 0,$$
$$\gamma = -g^2 b^2 x_1^2,$$
$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{3g}(2 + \sqrt{1-12g})},$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3g}(1 - \sqrt{1-12g})}. \tag{2.132}$$

これより，再び $g_c = \frac{1}{12}$ であることがわかる．さらに，$z_c = 2\sqrt{2}$ であることがわかり，

$$g = \frac{1}{12}e^{-a^2 t},$$
$$x = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}a\zeta} \tag{2.133}$$

とおく．このとき，

$$x_0 = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^{\frac{1}{2}}a + \mathcal{O}(a^2),$$
$$x_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}a + \mathcal{O}(a^2) \tag{2.134}$$

であることがわかる．これらを (2.128)，(2.131)，(2.132) に代入すると，

$$R(x) = const. + const.a + \frac{2\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}\left(\zeta - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)\sqrt{\zeta + \sqrt{t}} + \mathcal{O}(a^2) \tag{2.135}$$

を得る．第 1，2 項は $\frac{1}{2}V'(x)$ からの寄与であり，第 3 項は $W_0(x)$ からの寄与である．第 1，2 項は非ユニヴァーサルな部分で，第 3 項がバルクの宇宙定数が t で境界の宇宙項定数が ζ の円盤振幅である（図 2.7）．境界には印が付いている．この円盤振幅は **FZZT** ブレーン[22],[23] の円盤振幅を印をつけるために ζ で微分したものに等しい．これについて 2.9 節で議論する．

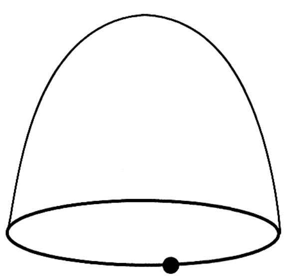


図 2.7　境界に印付きの円盤振幅．

2.8 固有値インスタントン

2.6 節では，ストリング方程式から得られる非臨界次元の弦理論の非摂動効果は，リューヴィル理論の D インスタントンである ZZ ブレーンの効果であることを見た．この節では，これが行列模型の**固有値インスタントン**の効果であることを見る [15],[16]．

再び，分配関数を固有値の積分で書いたもの (2.50) を書き下す．

$$\begin{aligned} Z_N &= \int \prod_i d\lambda_i \Delta^{(N)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)^2 exp\left(-N\sum_{i=1}^{N} V(\lambda_i)\right) \\ &= \int dx \int \prod_{i=1}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1}(x-\lambda_i)^2 \Delta^{(N-1)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})^2 \\ &\qquad \times e^{-N\sum_{i=1}^{N-1} V(\lambda_i)} e^{-NV(x)}. \end{aligned} \tag{2.136}$$

ここで，次の記法を導入した．

$$\Delta^{(N)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j). \tag{2.137}$$

また，ここでは後の便利のために N の添字を付け，1 つの固有値の積分を分離した．M' を $(N-1)\times(N-1)$ のエルミート行列として，

$$Z'_{N-1} = \int dM' e^{-N\mathrm{tr}V(M')} \tag{2.138}$$

を定義する．これを用いて，(2.136) は

$$\begin{aligned} Z_N &= Z'_{N-1}\int dx \langle \det(x-M')^2\rangle' e^{-NV(x)} \\ &= Z'_{N-1}\int dx e^{-NV_{eff}(x)}. \end{aligned} \tag{2.139}$$

ここで，$\langle\ \ \rangle'$ は (2.138) のもとでの期待値であり，$V_{eff}(x)$ は

$$V_{eff}(x) = V(x) - \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}\ln\langle\det(x-M')^2\rangle' \tag{2.140}$$

で定義される 1 つの固有値についての有効作用である．ここで，ラージ N 因子化を用いて，この有効作用を書き換える．

$$\begin{aligned} V_{eff}(x) &= V(x) - \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}\langle\ln\det(x-M')^2\rangle' \\ &= V(x) - 2\frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}\langle\mathrm{tr}\ln(x-M')\rangle' \\ &= V(x) - 2\frac{N-1}{N}\int_{x_*}^{x} dx' \left\langle \frac{1}{N-1}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{x'-M'}\right)\right\rangle' \\ &= V(x) - 2Re\int_{x_*}^{x} dx' R(x'). \end{aligned} \tag{2.141}$$

最後の行では，$R(x)$ は前節で扱ったリゾルヴェントの N^0 項であり，det$(x-$

$M')^2$ が半正定値であることから実部を指定した．

(2.128) と (2.131) を用いると，

$$V_{eff}(x) = -Re\int_{x_*}^{x} dx' g(x'^2 - x_0^2)\sqrt{(x'-x_1)(x'+x_1)} \tag{2.142}$$

となる．被積分関数は固有値密度がゼロでないところ $(-x_1 \le x' \le x_1)$ では純虚数であるので，そこでは $V_{eff}(x)$ は定数である．ここでは，固有値の海の中で他の固有値との間の力がバランスしているという描像が得られる．

$$V'_{eff}(x) = -Re(g(x^2 - x_0^2)\sqrt{(x-x_1)(x+x_1)}) \tag{2.143}$$

であり，$x_0 > x_1$ であることに注意すると，$V_{eff}(x)$ は $x = \pm x_0$ で極大値をとる．

$$\begin{aligned} &V'_{eff}(\pm x_0) = 0, \\ &V''_{eff}(\pm x_0) < 0. \end{aligned} \tag{2.144}$$

$V_{eff}(x)$ の概形を図 2.8 に示す．

$V(x_0)$ とプラトーの高さの差はインスタントンの作用と解釈される．

$$\begin{aligned} S_{inst} &= N(V_{eff}(x_0) - V_{eff}(x_1)) \\ &= -N\int_{x_1}^{x_0} dx g(x^2 - x_0^2)\sqrt{(x-x_1)(x+x_1)}. \end{aligned} \tag{2.145}$$

(2.86) と (2.134) を用い，さらに

$$x = 2\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}a\zeta\right) \tag{2.146}$$

と変数変換すると，(2.145) は

$$\begin{aligned} S_{inst} &= -\frac{\sqrt{2}a^{-\frac{5}{2}}}{g_{st}} 2\sqrt{2}a \int_{-t^{\frac{1}{2}}/4}^{t^{\frac{1}{2}}/8} d\zeta \frac{2\sqrt{2}}{3} a^{\frac{3}{2}} \left(\zeta - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)\sqrt{\zeta + \sqrt{t}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{5g_{st}} t^{\frac{5}{4}} \end{aligned} \tag{2.147}$$

と計算される．これは確かに，2.6 節で見た ZZ ブレーンの円盤振幅に等しい．したがって，ZZ ブレーンは固有値インスタントンに対応していることがわかる．

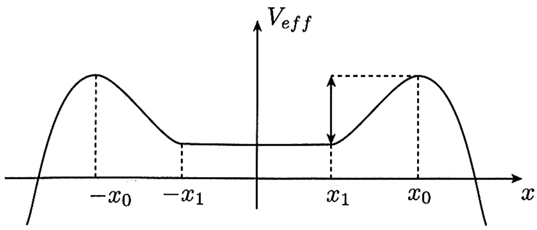


図 2.8　固有値の有効作用．

2.9 行列模型における時空の出現

元々，2.2 節で見たように，1 行列模型 (2.37) は単純な 2 次元面の 3 角形 (4 角形) 分割を与え，2 次元面上に物質場は導入されない．確かに，対応するリューヴィル理論は $D=0$ のものであった．しかし，(2.13) をみると，$\phi(x)$ を標的空間への写像関数とみなすと，標的空間が 1 次元の弦理論と見ることができることに注意しよう．$\hat{R}\phi$ の項が作用に存在することから，この標的空間に並進対称性はないことがわかる．この標的空間で $\phi=\infty$ のところに局在している D ブレーン（D インスタントン）が ZZ ブレーンであるが，行列模型において固有値の空間で 1 点に局在している固有値インスタントンが ZZ ブレーンの寄与による弦理論の非摂動効果を表すのであった．また，$-\infty<\phi<\infty$ に拡がった FZZT ブレーンの円盤振幅は行列模型では有限区間に集積した固有値からの寄与である円盤振幅に対応した．これから，ϕ が表す 1 次元の空間は行列 M の固有値の空間に相当することがわかる．ここで，標的空間に並進対称性はなく，行列模型にもそれに対応する対称性はない．このように，元の行列模型が素朴にゼロ次元の空間を表していたが，その行列の固有値から空間が出現する．

この時空の出現が第 6 章で解説する超弦理論の行列模型においても重要になっている．ここでは，10 次元の平坦な空間上の超弦理論を表す行列模型がどのようなものかを推察してみよう．時空がすべて行列の固有値から出現するとして，10 個のエルミート行列 A_μ $(\mu=0,1,\cdots,9)$ を考える．10 次元のローレンツ対称性と並進対称性をもつ最も簡単な作用は

$$S\sim -\mathrm{tr}([A_\mu,A_\nu][A^\mu,A^\nu]) \tag{2.148}$$

である．並進対称性は c_μ を 10 個の定数として

$$A_\mu\to A_\mu+c_\mu\mathbb{1} \tag{2.149}$$

のもとでの不変性である．これに超対称性を課すとフェルミオンを含む部分はユニークに決まり，

$$S=-\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{4}[A_\mu,A_\nu][A^\mu,A^\nu]+\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu,\psi]\right) \tag{2.150}$$

となる．これが，IIB 行列模型の作用であり，10 次元の $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン・ミルズ理論を 0 次元に次元還元した形をしている．$[A_\mu,A_\nu]=0$ すなわち同時対角な A_μ が古典的な真空に相当する．したがって，(2.148) を以下のように対角的な A_μ のまわりで展開するのは妥当であろう．

$$(A_\mu)_{ij}=x_\mu^{(i)}\delta_{ij}+(a_\mu)_{ij}. \tag{2.151}$$

このとき，$x_\mu^{(i)}$ を近似的に A_μ の固有値とみてよいだろう．適当にゲージを固

定すると，(2.148) は

$$S \sim \sum_{i,j}(x_\mu^{(i)} - x_\mu^{(j)})^2|(a_\nu)_{ij}|^2 + (\text{相互作用項}) \tag{2.152}$$

になる．これを基に摂動展開し，図 2.4 のようにファイアン図とランダム単体分割を対応させたとき（相互作用項が 3 次と 4 次の項から成るので，単体分割は 3 角形と 4 角形が混ざったものになる），インデックスループすなわち単体の頂点に $x_\mu^{(i)}$ が割り当てられる．よって，この単体分割は 2 次元面の 10 次元への埋め込みを表す．これから，この模型は 10 次元の超弦理論を表しうることがわかる．

この模型の説明に入る前に，第 3 章と第 4 章と第 5 章で行列模型における時空の出現の例を見ていく．具体的には行列模型から場の理論が得られることを見る．その際に，10 次元とは限らず，超対称性があるとも限らないが，(6.1) の形が頻繁に出てくる．

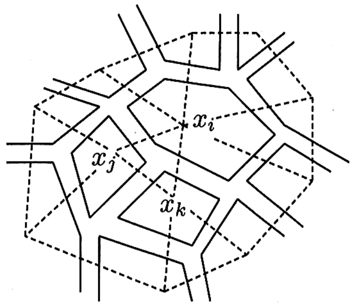


図 2.9　IIB 行列模型から得られるランダム単体分割．

第 3 章
ラージ N 還元

本章では，ラージ N ゲージ理論はそれを次元還元して得られる行列模型で記述されるというラージ N 還元 (large-N reduction) [24]~[28] について解説する *1)．次元還元した分の時空が行列の自由度から復活し，出現することを見る．これは行列模型における時空の出現の初めての例と言える．

3.1 行列場の理論のラージ N 還元

ゲージ理論を考える前に，以下のような R^d 上の ϕ^3 行列場理論を考える．ゲージ理論への移行は平易に行える．

$$S = \int d^d x \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \frac{\kappa}{3}\phi(x)^3\right). \tag{3.1}$$

ここで，$\phi(x)$ は $N \times N$ のエルミート行列の d 次元スカラー場である．この理論のラージ N 還元模型を得るために以下の規則を適用する．

$$\begin{aligned} &\phi(x) \to e^{iP_\mu x^\mu}\phi e^{-iP_\mu x^\mu}, \\ &\int d^d x \to \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d. \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) において，ϕ は空間に依存しない $N \times N$ のエルミート行列で，P_μ $(\mu = 1, \cdots, d)$ は以下のような d 個の対角行列である．

$$P_\mu = \begin{pmatrix} p_\mu^{(1)} & & & \\ & p_\mu^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_\mu^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

ここで，$p_\mu^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, N)$ は 1 辺の長さ Λ の d 次元立方体の中に一様に分

*1) ラージ N 等価性 (large-N equivalence) とも言う．

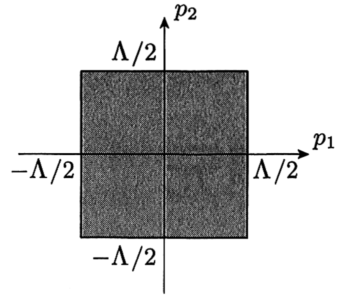


図 3.1　2 次元の場合の $(p_1^{(i)}, p_2^{(i)})$ $(i = 1, \cdots, N)$ の分布.

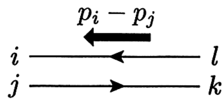


図 3.2　行列場の理論のプロパゲーター.

布した N 個の点を表す. Λ は紫外の運動量カットオフに相当することが後でわかる. 図 3.1 は $d = 2$ の場合を表す. 3.3 節で見るように, 格子理論で還元模型は 1 格子点に還元して得られる. Λ が運動量カットオフとすると, $(2\pi/\Lambda)^d$ は格子では単位格子の体積に相当するので, (3.2) の 2 つめの式は空間の全体積を単位格子の体積にするという意味で格子理論での描像と合致している. (3.2) より,

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \to e^{iP_\mu x^\mu} i[P_\mu, \phi] e^{-iP_\mu x^\mu} \tag{3.4}$$

となる.

得られる還元模型は

$$\begin{aligned} S_r &= \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}[P, \phi]^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\kappa}{3}\phi^3\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}((p^{(i)} - p^{(j)})^2 + m^2)|\phi_{ij}|^2 + \frac{\kappa}{3}\sum_{i,j,k}\phi_{ij}\phi_{jk}\phi_{ki}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

である. これは P_μ という「外場」が入った行列模型とみなせる.

この還元模型の摂動展開を考えよう. (3.5) からプロパゲーターは

$$\langle \phi_{ij}\phi_{kl}\rangle = \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^d \frac{1}{(p_i - p_j)^2 + m^2}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{3.6}$$

である (図 3.2). これから, ϕ_{ij} は $p^{(i)} - p^{(j)}$ の運動量を運んでいることがわかる. ヴァーテックスは再び図 2.3 で与えられ,

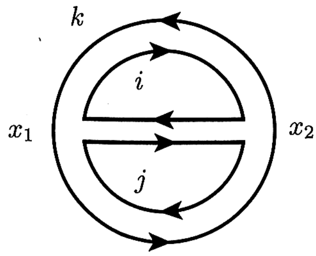


図 3.3　自由エネルギーの 2 ループプラナーダイアグラム．

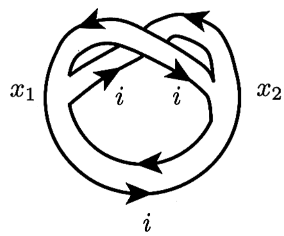


図 3.4　自由エネルギーの 2 ループ非プラナーダイアグラム．

$$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \kappa\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} \tag{3.7}$$

である．行列の積より，ヴァーテックスでの運動量の保存が保証されていることがわかる．

例として，自由エネルギーを摂動論で計算してみる．自由エネルギーの 2 ループのダイアグラムは図 3.3 と図 3.4 の 2 つがある．前者はプラナーダイアグラムで，後者は非プラナーダイアグラムである．プラナーダイアグラムは以下のように計算される．

$$\frac{1}{6}\kappa^2\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^{2d}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^{3d}\sum_{i,j,k}\frac{1}{(p^{(i)}-p^{(k)})^2+m^2}\frac{1}{(p^{(j)}-p^{(i)})^2+m^2} \times\frac{1}{(p^{(k)}-p^{(j)})^2+m^2}. \tag{3.8}$$

ここで，

$$k_1 = p^{(i)} - p^{(k)}, \quad k_2 = -p^{(j)} + p^{(k)} \tag{3.9}$$

とおき，N が大きいときに成り立つ

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^d\sum_i = \int\frac{d^dk_1}{(2\pi)^d}, \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^d\sum_j = \int\frac{d^dk_2}{(2\pi)^d} \tag{3.10}$$

の関係を用いて，i と j の和を積分に直すと k の和は N の因子を出す．こうし

て，(3.8) は次のように書き換えられる．

$$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \frac{N^2\lambda}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_1^2+m^2}\frac{1}{k_2^2+m^2}\frac{1}{(k_1+k_2)^2+m^2}. \tag{3.11}$$

ここで，$\lambda=\kappa^2 N$ はトフーフト結合定数である．運動量積分はパラメータ Λ で紫外カットオフされている．一方，非プラナーダイアグラムは次のように計算される．

$$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \frac{1}{6}N^2\lambda\frac{1}{m^6}\times\frac{1}{N^2}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^{2d}. \tag{3.12}$$

元の行列場の理論 (3.1) の自由エネルギーの 2 ループのダイアグラムも図 3.3 と図 3.4 の 2 つである．(3.11) を $(2\pi/\Lambda)^d$ で割ったものは，元の行列場の理論の図 3.3 のダイアグラムを全空間の体積で割ったものに等しい．一方，(3.12) は元の行列場の理論の図 3.4 のダイアグラムには対応しない．これは図 3.4 においてはプロパゲーターの 2 重線のインデックスが等しいために運動量が流れないためである．元の理論で，トフーフト結合定数 λ を固定して，$N\to\infty$ の極限をとることを，トフーフト極限，プラナー極限，あるいは**ラージ N 極限**と呼ぶ．この極限では，図 3.4 のダイアグラムは図 3.3 のダイアグラムに比べて $1/N^2$ で抑制されて考えなくてよくなる．一般に，プラナー極限にはプラナーダイアグラムのみ寄与する．還元模型においても，インデックスの和を運動量の積分に置き換えるとき，

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^d \to 0 \tag{3.13}$$

の極限をとっている．これは赤外のカットオフをゼロにもっていく極限と言える．(3.12) は (3.11) に比べて $\frac{1}{N^2}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^{2d}$ で抑制されているので効かなくなる．このようなことは任意のループで成り立っていることは明らかであろう．

こうして，還元模型 (3.5) で

$$N\to\infty,\quad \kappa\to 0,\quad \frac{1}{N}\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^d\to 0,\quad \lambda=\kappa^2 N=\text{固定} \tag{3.14}$$

の極限をとると，元の理論 (3.1) のプラナー極限を再現することがわかった．自由エネルギーの対応は F，F_r をそれぞれ元の理論の自由エネルギー，還元模型の自由エネルギーとすると，

$$\frac{F}{N^2\mathrm{Vol}} = \frac{F_r}{N^2\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d} \tag{3.15}$$

となる．左辺は単位体積当たりの自由エネルギーを N^2 で割ったもので，第 2 章での議論からもわかるようにプラナー極限で有限である．右辺では還元模型では系の体積が $\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d$ になっていると思うと，やはり同じ解釈がつく．(前に述

べたように，$2\pi/\Lambda$ が「格子間隔」に相当する.)

相関関数については，元の理論でシングルトレースの相関関数に対して，(3.58) を適用して，次の関係式がラージ N のリーディングで成立することを見ることは易しい.

$$\frac{1}{N^{q/2+1}}\left\langle \mathrm{Tr}(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_q))\right\rangle = \frac{1}{N^{q/2+1}}\left\langle \mathrm{Tr}(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_q)\right\rangle_r . \tag{3.16}$$

ここで，

$$\hat{\phi}(x) = e^{iP_\mu x^\mu}\phi e^{-iP_\mu x^\mu} \tag{3.17}$$

であり，$\langle\cdots\rangle$ と $\langle\cdots\rangle_r$ はそれぞれ場の理論における期待値と還元模型における期待値を表す．(3.16) の両辺は $N\to\infty$ の極限で有限である．

3.2 ゲージ理論のラージ N 還元

次に，ゲージ理論の場合を考えよう．簡単のため，d 次元の $U(N)$ ヤン・ミルズ理論を考える．

$$S = \frac{1}{4g_{YM}^2}\int d^dx\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu})^2. \tag{3.18}$$

ここで，場の強さ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \tag{3.19}$$

にラージ N 還元の規則 (3.2) を適用すると，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \to & e^{iP_\lambda x^\lambda}(i[P_\mu, A_\nu] - i[P_\nu, A_\mu] + i[A_\mu, A_\nu])e^{-iP_\lambda x^\lambda} \\ &= e^{iP_\lambda x^\lambda}(i[P_\mu + A_\mu, P_\nu + A_\nu])e^{-iP_\lambda x^\lambda} \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．

$$X_\mu = P_\mu + A_\mu \tag{3.21}$$

とおくと，ラージ N 還元模型は

$$S_r = -\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \frac{1}{4g_{YM}^2}\mathrm{Tr}[X_\mu, X_\nu]^2 \tag{3.22}$$

となる．3.1 節の行列場の理論の場合と異なり，P_μ は A_μ に吸収され，P_μ は X_μ の背景場となった．この理論は元のヤン・ミルズ理論をゼロ次元に次元還元したものになっており，d 個のエルミート行列からなる行列模型の形をしている．3.1 節で見た等価性が成り立てば，ゲージ理論のプラナー極限はそれを次元還元して得れれる行列模型で記述されるということになる．行列のカラー

の自由度に時空が含まれていて，ゼロ次元から d 次元時空が出現することがみてとれるだろう．ただし，この節の最後に述べるように注意が必要である．

ここで，ウィルソンループの期待値の等価性を見ておこう．まず，還元模型におけるウィルソンループから出発する．

$$W_r[x(\cdot)] = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(P\exp\left[i\int_0^1 d\sigma x'^{\mu}(\sigma)X_\mu\right]\right). \tag{3.23}$$

今，$x'^{\mu}(\sigma)X_\mu = x'^{\mu}(\sigma)(P_\mu + A_\mu)$ を時間 σ に依存する‘ハミルトニアン’と考え，

$$U(\sigma) = P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')X_\mu\right] \tag{3.24}$$

を時間発展演算子とみなす．すると，$U(0)=1$ であり，

$$i\frac{d}{d\sigma}U = -Ux'^{\mu}(\sigma)X_\mu \tag{3.25}$$

が満たされる．$x'^{\mu}(\sigma)P_\mu$ を‘自由パート’，$x'^{\mu}(\sigma)A_\mu$ を‘相互作用パート’とみなす．(3.24) は相互作用表示での時間発展演算子とのアナロジーから

$$U(\sigma) = P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')\hat{A}_\mu(x(\sigma'))\right] P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')P_\mu\right] \tag{3.26}$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned}\hat{A}_\mu(x(\sigma)) &= P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')P_\mu\right] A_\mu \left(P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')P_\mu\right]\right)^\dagger \\ &= e^{iP_\mu(x^\mu(\sigma)-x^\mu(0))}A_\mu e^{-iP_\mu(x^\mu(\sigma)-x^\mu(0))}\end{aligned} \tag{3.27}$$

であり，(3.26) における因子

$$P\exp\left[i\int_0^\sigma d\sigma' x'^{\mu}(\sigma')P_\mu\right] \tag{3.28}$$

は相互作用表示からシュレディンガー表示への変換に相当している．実際，(3.25) における $U(\sigma)$ が $U(0)=1$ を満たし，(3.25) を満たすことは容易に確かめられる．$x^\mu(1) = x^\mu(0)$ であることに注意すると，

$$W_r[x(\cdot)] = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(P\exp\left[i\int_0^1 d\sigma x'^{\mu}(\sigma)\hat{A}_\mu(x(\sigma))\right]\right) \tag{3.29}$$

と書ける．さて，これを (3.16)，(3.17) と比べると，元のヤン・ミルズ理論でのウィルソンループ

$$W[x(\cdot)] = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(P\exp\left[i\int_0^1 d\sigma x'^{\mu}(\sigma)A_\mu(x(\sigma))\right]\right)\right\rangle \tag{3.30}$$

に対して，

$$\langle W[x(\cdot)]\rangle = \langle W_r[x(\cdot)]\rangle_r \tag{3.31}$$

が成立することがわかる．すなわち，ウィルソンループの期待値はそのウィルソンループの中のゲージ場を次元還元して得られる還元模型のウィルソンループの期待値に等しい．この関係式の格子理論版を次節で導く．

元のヤン・ミルズ理論のゲージ対称性は

$$X'_a = UX_aU^{\dagger}, \tag{3.32}$$

によって与えられる還元模型 (3.22) の対称性に対応する．このように，運動量のカットオフ Λ を導入したにもかかわらず，還元模型はゲージ対称性を保つ正則化を与える．

$X_\mu = P_\mu$ は確かに (3.22) の古典的真空であるが，そのまわりにはゼロ次元の質量なし場が存在する．これは，X_μ が可換，すなわち同時対角化可能ならば常に古典的真空の配位になることに起因する．この質量なし場によりこの真空は不安定になる．実際，X_μ の固有値の間には引力が働き *2)，固有値が拡がらず，元の理論との対応は成り立たない *3)．これは並進対称性 $X_\mu \to X_\mu + \alpha_\mu \mathbb{1}$ (α_μ は定数）の自発的な破れと言え，次節で見る格子ゲージ理論の還元模型における $U(1)^d$ 対称性の自発的な破れに対応している．3.1 節と 3.2 節では時空が行列の自由度から出現する 1 つの機構を理解することが主眼であったが，$U(1)^d$ 対称性の破れをどう克服するかについては次節で議論する．

3.3 格子ゲージ理論におけるラージ N 還元

この節では 2.1 節と 2.2 節で見たことを格子上で見てみる．これによって，非摂動的にラージ N 還元をとらえることができる．ラージ N 還元のオリジナルの論文 [24] では格子上の理論を扱っている．

まず，格子上の $U(N)$ ヤン・ミルズ理論について復習しよう．分配関数は次式で定義される．

$$Z = \prod_x \prod_\mu \int dU_{x,\mu} \exp\left\{\beta \sum_x \sum_{\mu\neq\nu=1}^{d} \mathrm{tr}\left(U_{x,\mu}U_{x+\mu,\nu}U^{\dagger}_{x+\nu,\mu}U^{\dagger}_{x,\nu}\right)\right\}. \tag{3.33}$$

ここで，図 3.5 にあるように x は格子点を表し，$x+\mu$ は x から μ 方向に 1 格子間隔分進んだ格子点を表す．$U_{x,\mu}$ は x から $x+\mu$ へ至るリンク上のリンク変数で，$U(N)$ に値をとる．

観測量として，図 3.5 の上側にあるようなウィルソンループの期待値を考える．

*2) これは，還元模型 (3.22) の $X_\mu = P_\mu$ のまわりの 1 ループ有効作用が，(E.11) から $W = \frac{1}{2}(d-2)\sum i \neq j \log(p^{(i)} - p^{(j)})^2$ となることから理解できる．

*3) これは，還元模型 (3.22) がよく定義されないということを意味するものではない．実際，(F.52) の条件が満たされるとき，還元模型 (3.22) はよく定義される．

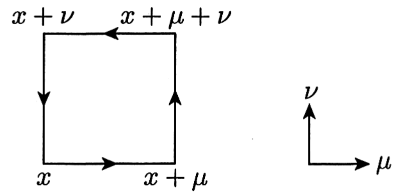


図 3.5　格子点とリンク.

$$W(C) = \langle \mathrm{tr}\,(U_{x,\mu}U_{x+\mu,\nu}U_{x+\mu+\nu,\alpha}\cdots U_{x-\sigma,\sigma})\rangle. \tag{3.34}$$

さて，(3.33) において，1 格子上の模型としたものが還元模型である．

$$Z_r = \prod_\mu \int dU_\mu \exp\left\{\beta \sum_{\mu\neq\nu=1}^{d} \mathrm{tr}\left(U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger\right)\right\}. \tag{3.35}$$

リンク変数 U_μ はもはや μ 依存性しか持っていないことに注意したい．(3.34) に対応したものとして，還元模型のウィルソンループの期待値は

$$W_r(C) = \langle \mathrm{tr}\,(U_\mu U_\nu U_\alpha \cdots U_\sigma)\rangle_r \tag{3.36}$$

のように書ける．ここで，$C:(x, x+\mu, x+\mu+\nu, x+\mu+\nu+\alpha, \cdots, x+\mu+\nu+\alpha+\sigma)$ で指定される経路に対して，全体の並進を除いて，$C:(\mu,\nu,\alpha,\cdots,\sigma)$ の列がユニークに定まることに注意したい．

元の理論における $W(C)$ に対する Schwinger-Dyson 方程式（ループ方程式）を導出するために，以下の表式を考える．

$$\langle \mathrm{tr}(U_{x,\mu}\cdots U_{y-\nu,\nu}t^a U_{y,\alpha}U_{y+\alpha,\beta}\cdots U_{x-\sigma,\sigma})\rangle. \tag{3.37}$$

ここで，t^a $(a=1,\cdots,N^2)$ は $U(N)$ の生成子である．変数変換

$$U_{y,\alpha} \to (1+i\epsilon t^a)U_{y,\alpha} \tag{3.38}$$

を行い，経路積分の測度はこの変換のもとで不変であることを使うと，

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr}(U_{x,\mu}\cdots U_{y-\nu,\nu}t^a t^a U_{y,\alpha}U_{y+\alpha,\beta}\cdots U_{x-\sigma,\sigma}\rangle \\
&+\beta\sum_{\rho\neq\alpha}\langle \mathrm{tr}(U_{x,\mu}\cdots U_{y-\nu,\nu}t^a U_{y,\alpha}U_{y+\alpha,\beta}\cdots U_{x-\sigma,\sigma}\rangle \\
&\qquad\qquad \times \langle \mathrm{tr}(t^a U_{y,\alpha}U_{y+\alpha,\rho}U_{y+\rho,\alpha}^\dagger U_{y,\rho}^\dagger)\rangle \\
&-\beta\sum_{\rho\neq\alpha}\langle \mathrm{tr}(U_{x,\mu}\cdots U_{y-\nu,\nu}t^a t^a U_{y,\alpha}U_{y+\alpha,\beta}\cdots U_{x-\sigma,\sigma}\rangle \\
&\qquad\qquad \times \langle \mathrm{tr}(U_{y,\rho}U_{y+\rho,\alpha}U_{y+\alpha,\rho}^\dagger U_{y,\alpha}^\dagger t^a)\rangle \\
&=0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

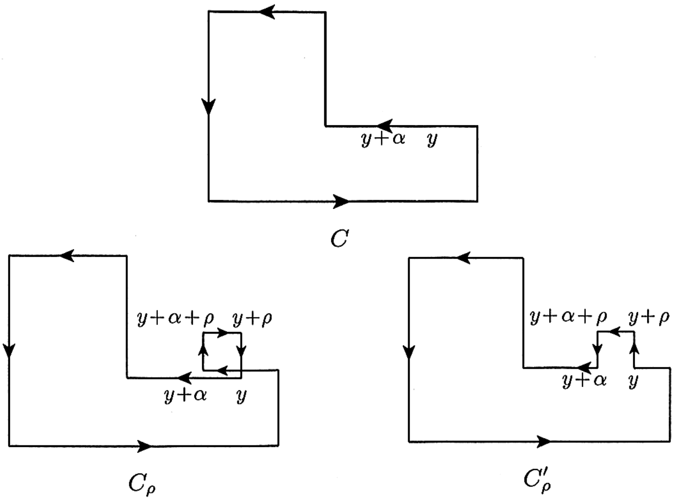


図 3.6　ループ方程式における作用の変分からの寄与.

を得る．a について和をとり，

$$\sum_{a=1}^{N^2}(t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} \tag{3.40}$$

を使うと，Schwinger-Dyson 方程式

$$N\langle \mathrm{tr}\prod_{i\in C}U_i\rangle + \beta\sum_{\rho\neq\alpha}\langle \mathrm{tr}\prod_{i\in C_\rho}U_i\rangle - \beta\sum_{\rho\neq\alpha}\langle \mathrm{tr}\prod_{i\in C'_\rho}U_i\rangle = 0 \tag{3.41}$$

を得る．ここで，経路は

$$\begin{aligned}
&C : (x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, \cdots, x-\sigma, x),\\
&C_\rho : (x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y, y+\alpha, y+\alpha+\rho, y+\rho, y, y+\alpha,\\
&\qquad y+\alpha+\beta, \cdots, x-\sigma, x),\\
&C'_\rho : (x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y, y+\rho, y+\rho+\alpha, y+\alpha, y+\alpha+\beta,\\
&\qquad \cdots, x-\sigma, x)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

で与えられる．C と C_ρ と C'_ρ は図 3.6 に与えられている．

リンク (y, α) が経路 C の中に 2 度以上現われるときは，(3.42) に付加項がある．例えば，

$$\begin{aligned}
&C : (x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y, y+\alpha, y+\alpha+\beta,\\
&\qquad \cdots, y-\gamma, y, y+\alpha, y+\alpha+\delta, \cdots, x-\sigma, x)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

のとき，

$$\langle \mathrm{tr}\prod_{i\in C_1}U_i \mathrm{tr}\prod_{j\in C_2}U_j\rangle \tag{3.44}$$

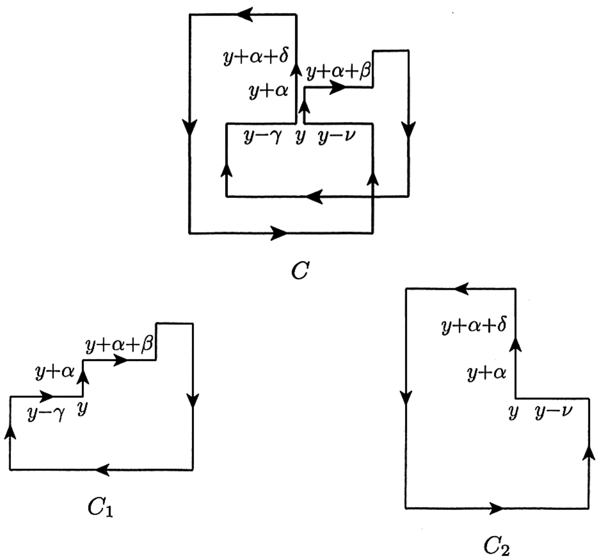


図 3.7　同一リンクが経路の中に 2 度現われる場合のウィルソンループとループの分裂.

が (3.42) に付け加わる．ここで,

$$C_1 : (y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, \cdots, y-\gamma, y),$$
$$C_2 : (y, y+\alpha, y+\alpha+\delta, \cdots, x-\sigma, x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y) \qquad (3.45)$$

である．これはループの分裂に相当する．C と C_1 と C_2 は図 3.7 に与えられている．

さて，還元模型における Schwinger-Dyson 方程式を考えよう．元の理論の場合の導出を繰り返すと，元の理論の方程式 (3.42), (3.44) に，リンク変数が同一視されるために生じる項が加わることがわかる．例として，経路が

$$C : (x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y, y+\alpha, y+\alpha+\beta,$$
$$\cdots, z-\gamma, z, z+\alpha, z+\alpha+\delta, \cdots, x-\sigma, x) \qquad (3.46)$$

で与えられる場合を見てみる．この経路にはリンク (y,α) と (z,α) が現われている．以下では $y \neq z$ であるとしよう．還元模型では，$y \neq z$ であったとしてもこれら 2 つのリンクに同じ U_α が割り当てられる．したがって，以下の項が Schwinger-Dyson 方程式に加わる．

$$W(C_1, C_2) = \langle \mathrm{tr}(U_\alpha U_\beta \cdots U_\gamma)\mathrm{tr}(U_\alpha U_\delta \cdots U_\sigma U_\mu \cdots U_\nu)\rangle_r. \qquad (3.47)$$

ここで，$(\alpha, \beta, \cdots, \gamma)$ と $(\alpha, \delta, \sigma, \mu, \cdots, \nu)$ はそれぞれ開いた経路 C_1 と C_2 に対応する．

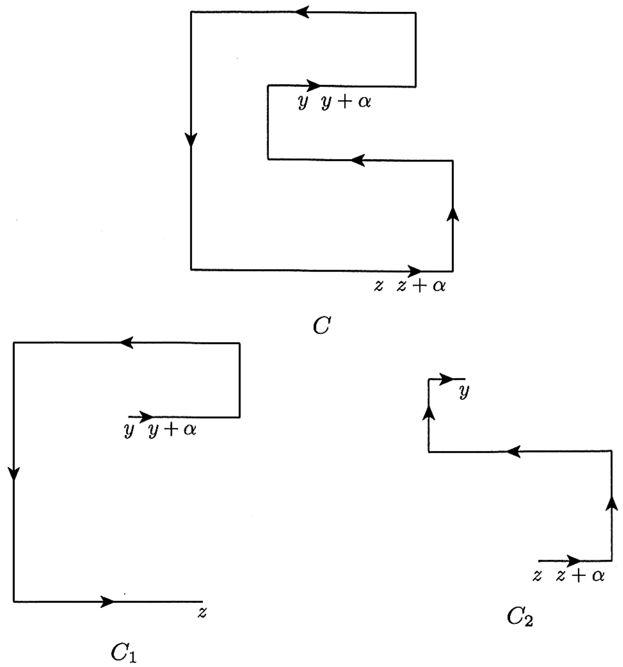


図 3.8　還元模型における開いたループの寄与.

$$C_1 : (y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, \cdots, z-\gamma, z),$$
$$C_2 : (z, z+\alpha, z+\alpha+\delta, \cdots, x-\sigma, x, x+\mu, \cdots, y-\nu, y). \qquad (3.48)$$

C と C_1 と C_2 は図 3.8 に与えられている.

このように，還元模型の Schwinger-Dyson 方程式は元の理論のそれと異なる．しかし，2.7 節で見たように，

$$N \to \infty, \quad \beta/N = \text{固定} \qquad (3.49)$$

のトフーフト極限（プラナー極限）では，因子化が成立する．よって，(3.47) は

$$W(C_1, C_2) = \langle \mathrm{tr}(U_\alpha U_\beta \cdots U_\gamma)\rangle_r \langle \mathrm{tr}(U_\alpha U_\delta \cdots U_\sigma U_\mu \cdots U_\nu)\rangle_r + \mathcal{O}(N^0) \qquad (3.50)$$

となる．C_1 と C_2 は開いた経路だから，少なくとも 1 つの方向 ρ が存在して，$(\alpha, \beta, \cdots, \gamma)$ と $(\alpha, \delta, \sigma, \mu, \cdots, \nu)$ において U_ρ と $U_\rho^\dagger$ の数が異なる．(3.35) において，作用と積分測度は

$$U_\rho \to e^{\theta_\rho} U_\rho \qquad (3.51)$$

のもとで不変である．これを $U(1)^d$ 対称性という．この対称性が自発的に破れていなければ，

$$\langle \mathrm{tr}(U_\alpha U_\beta \cdots U_\gamma)\rangle_r = \langle \mathrm{tr}(U_\alpha U_\delta \cdots U_\sigma U_\mu \cdots U_\nu)\rangle_r = 0 \qquad (3.52)$$

となる．こうして，還元模型の Schwinger-Dyson 方程式は元の理論のそれとトフーフト極限で一致する．Schwinger-Dyson 方程式の解は境界条件に依る．同じ境界条件が満たされれば，非摂動的に

$$W(C) = W_r(C) \tag{3.53}$$

が成り立つことになる．これは，(3.31) に対応する．

強結合展開の収束半径の範囲内でラージ N 還元が成立することを示すことができる．これは，この収束半径内では $U(1)^d$ 対称性は破れないことを意味する．実際は $d > 2$ のときは，β/N がある臨界値より大きいと，$U(1)^d$ 対称性は破れる[25]*4)．連続極限では $\beta/N \to \infty$ とするから，これは $d > 2$ では Z_r についてそのままではラージ N 還元が連続極限では成立しないことを意味する．$d = 4$ で随伴表現のディラックフェルミオンを入れると $U(1)^d$ 対称性が破れないで，ラージ N 還元が連続極限でも成立することが報告されている[29],[30]*5)．また，$U(1)^d$ 対称性の破れを克服するために，**ツイスト還元模型**（とその改良版）が提唱されている[31]~[33]．ツイスト還元模型については，5.2 節で見る．

3.4 実空間から見たラージ N 還元

この節では，ラージ N 還元を実空間で見てみる[34]．3.1 節と 3.2 節では運動量空間の基底をとっていたことに相当するが，ここでは実空間の基底をとる．このような見方をすることにより，ラージ N 還元の理解を深めるとともに，次節で見るように群多様体上でラージ N 還元が成立することを容易に示すことができる．

ここでは，例として 3.1 節と同じ R^d 上のスカラー ϕ^3 理論を考える．再び書くと，

$$S = \int d^d x \ \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 + \frac{1}{3}\kappa\phi(x)^3\right). \tag{3.54}$$

ここで，$\phi(x)$ は $N \times N$ エルミート行列である．プラナー（トフーフト）極限をここではとる．

$$N \to \infty, \ \ \kappa \to 0, \quad \kappa^2 N = \lambda = \text{固定}. \tag{3.55}$$

λ はトフーフト結合定数である．

プロパゲーターは次で与えられる．

---

*4)　これは，3.2 節の脚注 2）の議論と同様な議論から理解できる．U_μ の固有値間の引力から固有値が単位円周上の 1 点（微小部分）に集積する．

*5)　(E.11) からわかるように，フェルミオンは固有値間に斥力を生じさせる．自由度の勘定から，4 次元の随伴表現のディラックフェルミオンの場合はこの斥力が 3.2 節の脚注 2）で見た引力に打ち勝つことがわかる．これが，$U(1)^d$ の破れが避けられる機構である．

$$\langle\phi(x_1)_{ij}\phi(x_2)_{kl}\rangle = D(x_1 - x_2)\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.56}$$

以下の議論では $D(x)$ の具体的な形は必要ない．ここでは例として，再び自由エネルギーを 2 ループレベルで計算してみる．2 つのダイアグラム図 3.3（プラナー）と図 3.4（非プラナー）があった．

図 3.3 のプラナーダイアグラムの結果は

$$\text{図 } 3.3 = \frac{1}{6}N^2\lambda\int d^dx_1d^dx_2\ D(x_1 - x_2)^3 \tag{3.57}$$

であり，図 3.4 の非プラナーダイアグラムの結果は (3.57) の右辺を N^2 で割ったものになっている．これは，今まで見てきたようなラージ N 極限ではプラナーのみ寄与するという事実の例となっている．

(3.54) の還元模型を定義するために，R^d 上の関数空間を考える．還元模型を得るための規則は (3.2) に対応する以下で与えられる．

$$\phi(x) \to e^{i\hat{P}_\mu x^\mu}\hat{\phi}e^{-i\hat{P}_\mu x^\mu}, \quad \int d^dx \to v. \tag{3.58}$$

ここで，$\hat{\phi}$ は R^d 上の関数空間に作用するエルミート演算子であり，$\hat{P}_\mu$ は同じ関数空間に作用する運動量演算子である．v は後で決定される定数である．座標基底 $|x\rangle$ $(x \in R^d)$ へ $\hat{P}_\mu$ は次のように作用する．

$$\hat{P}_\mu|x\rangle = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}|x\rangle, \qquad \langle x|\hat{P}_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle x|. \tag{3.59}$$

(3.58) を (3.54) に適用することにより，還元模型が得られる．

$$S_r = v\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}[i\hat{P}_\mu, \hat{\phi}]^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{3}\kappa\hat{\phi}^3\right). \tag{3.60}$$

ここで，Tr は R^d 上の関数空間におけるトレースである．(3.60) は一見，2.1 節で考えた還元模型と異なって見える．しかし，運動量のカットオフ Λ を導入し，R^d 上の関数空間を N 次元のベクトル空間で近似すれば，同じものになっていることがわかる．実際，ここで，

$$v = \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d \tag{3.61}$$

とおき，$\hat{P}_\mu$ を対角化する基底をとる．すると，$\hat{\phi}$ は $N \times N$ のエルミート行列になり，$\hat{P}_\mu$ は (3.3) の右辺で与えられる対角的な定行列になる．Tr は $N \times N$ 行列のトレースと見られる．Λ と N の導入は実空間では次のように解釈される．実空間は 1 辺が $2\pi/\Lambda$ の d 次元立方体 N 個で粗視化される．実空間の体積は $V = Nv$ で与えられる．

以下で，ラージ N 還元を実空間で再解釈する．$\hat{\phi}$ の座標基底での行列要素を

$$\langle x|\hat{\phi}|x'\rangle \equiv \phi(x, x') \tag{3.62}$$

と書く．これは R^d 上の 2 局所場と見られる．$\hat{\phi}$ のエルミート性から，$\phi^*(x,x')=\phi(x',x)$ が成り立つ．(3.59) を使って，(3.60) は座標基底で次のように表される．

$$S_r = v\int d^dxd^dx'\left(-\frac{1}{2}\phi(x',x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^2\phi(x,x')\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}m^2\phi(x',x)\phi(x,x')\right)$$
$$+v\int d^dxd^dx'd^dx''\ \frac{1}{3}\kappa_r\phi(x,x')\phi(x',x'')\phi(x'',x). \qquad (3.63)$$

このように，還元模型は **2 局所場の理論**と見ることができる．

変数変換

$$X^\mu = x^\mu,\ \ \xi^\mu = x^\mu - x'^\mu, \qquad (3.64)$$

をして，$\phi(x,x')$ を X と ξ の関数とみなすと便利である．X^μ は 2 つの端点のうちの 1 つの端点の座標であり，ξ^μ は 2 つの端点の相対座標である．すると，次の等式が成り立つことがわかる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)\phi(x,x') = \frac{\partial}{\partial X^\mu}\phi(x,x'). \qquad (3.65)$$

この等式から，還元模型におけるプロパゲーターは次の形をとることがわかる．

$$\langle\phi(x_1,x_1')\phi(x_2',x_2)\rangle = \frac{1}{v}D(x_1-x_2)\delta^d((x_1-x_1')-(x_2-x_2')). \qquad (3.66)$$

各端点は元の場の理論 (3.54) における粒子と同じように伝搬するのに対し，相対座標はその伝搬において保存する．これは，伝搬において

$$x_1 - x_2 = x_1' - x_2' \qquad (3.67)$$

が成り立つことを意味する．これは，(3.66) におけるデルタ関数からも理解される．言い換えると，2 つの端点は平行移動される．

還元模型における各ダイアグラムは元の場の理論におけるダイアグラムと 1 対 1 対応がある．例として，再び還元模型において自由エネルギーを 2 ループレベルで計算する．図 3.9 と図 3.10 のダイアグラムは，それぞれ図 3.3 と図 3.4 のダイアグラムの対応物である．図 3.9 と図 3.10 では上で述べた性質が可視化されている．ここで，元の場の理論におけるプラナーダイアグラムに対応する還元模型におけるダイアグラムは，もはや平面上に書くことはできないが，なおもプラナーダイアグラムと呼ぶ．同様に，元の場の理論における非プラナーダイアグラムに対応する還元模型におけるダイアグラムは非プラナーダイアグラムと呼ぶ．

図 3.9 のダイアグラムは次のように計算される．

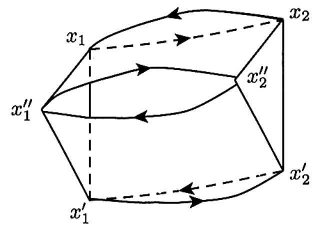


図 3.9　実空間での自由エネルギーの 2 ループプラナーダイアグラム.

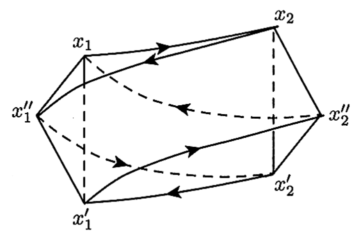


図 3.10　実空間での自由エネルギーの 2 ループ非プラナーダイアグラム.

$$
\begin{aligned}
&\text{図 3.9}\\
&= \frac{\kappa^2}{6v}\int d^dx_1d^dx_1'd^dx_1''d^dx_2d^dx_2'd^dx_2''\ D(x_1-x_2)\delta^d((x_1-x_1')-(x_2-x_2'))\\
&\qquad\qquad \times D(x_1'-x_2')\delta^d((x_1'-x_1'')-(x_2'-x_2''))\\
&\qquad\qquad \times D(x_1''-x_2'')\delta^d((x_1''-x_1)-(x_2''-x_2))\\
&= \frac{\kappa^2}{6v}\delta^d(0)V^2\int d^dx_1d^dx_2\ D(x_1-x_2)^3. \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

実際，この結果は図 3.9 から理解される．まず，x_1 と x_2 を固定する．相対座標は保存するので，$x_1-x_1'=x_2-x_2'$ が成り立ち，x_1' を固定することは x_2' を固定することを意味する．同様にして，$x_1'-x_1''=x_2'-x_2''$ から x_1'' を固定することは x_2'' を固定することを意味する．すると，$x_1''-x_1=x_2''-x_2$ から $\delta^d(0)$ が生じる．図 3.9 から $x_1-x_2=x_1'-x_2'=x_1''-x_2''$ は成り立つことがわかる．これは，(3.67) からも理解できる．こうして，$\int d^dx_1d^dx_2D(x_1-x_2)^3$ を得る．V^2 の因子は x_1' と x_1'' の自由度から生じる．$1/v$ の因子はプロパゲーターとヴァーテックスからくる．

(3.57) と (3.68) を比較し，$\delta^d(0)=1/v$ と $V=Nv$ を使うと，図 3.3 のダイアグラムの結果 (3.57) を N^2V で割ったものと図 3.9 の結果 (3.68) を N^2v で割ったものは，$N\to\infty, v\to 0, V=Nv\to\infty$ の極限で等しいことがわかる．これがすべてのプラナーダイアグラムに対して成り立つことを見るのは易しい．

一方，図 3.10 のダイアグラムは次のように計算される．

図 3.10

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\kappa^2}{6v}\int d^dx_1 d^dx_1' d^dx_1'' d^dx_2 d^dx_2' d^dx_2''\ D(x_1-x_2)\delta^d((x_1-x_1')-(x_2-x_2')) \\
&\qquad \times D(x_1'-x_2'')\delta^d((x_1'-x_1'')-(x_2''-x_2)) \\
&\qquad \times D(x_1''-x_2')\delta^d((x_1''-x_1)-(x_2'-x_2'')) \\
&= \frac{\kappa^2}{6v}\delta^d(0)\int d^dx_1 d^dx_1' d^dx_2 d^dx_2'' D(x_1-x_2)D(x_1'-x_2'')D(x_1-x_2'').
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

この場合，x_1-x_2 と $x_1'-x_2''$ と $x_1''-x_2'$ はすべて異なる．よって，図 3.4 のダイアグラムと図 3.10 のダイアグラムの間に対応はない．しかし，(3.68) と (3.69) から，図 3.10 のダイアグラムの結果は図 3.9 のダイアグラムの結果に比べて，$V\to\infty$ の極限で $1/V^2$ だけ抑制される．

還元模型において，すべての非プラナーダイアグラムがプラナーダイアグラムと比較して，$V\to\infty$ の極限において抑制されることを確かめるのは易しい．また，場の理論においてすべての非プラナーダイアグラムがプラナー極限で寄与しない．よって，元の場の理論の自由エネルギー F と還元模型の自由エネルギー F_r との間に次の関係が成り立つことがわかる．

$$
N\to\infty,\ \ \kappa\to 0,\ \ v\to 0\quad \text{ここで}\ V=Nv\to\infty,\ \ \lambda=\kappa^2N=\text{固定}
\tag{3.70}
$$

の極限で，

$$
\frac{F}{N^2V}=\frac{F_r}{N^2v},
\tag{3.71}
$$

また，相関関数について，(3.16) に相当する

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{q/2+1}}\langle \mathrm{Tr}(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_q))\rangle \\
&=\frac{1}{N^{q/2+1}}\langle \mathrm{Tr}(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\cdots\hat\phi(x_q))\rangle_r,
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

が (3.70) の極限で成り立つことを見ることも易しい．ここで，$\hat\phi(x)$ は

$$
\hat\phi(x)=e^{i\hat P_\mu x^\mu}\hat\phi e^{-i\hat P_\nu x^\nu}
\tag{3.73}
$$

で定義される．このように，還元模型は元の場の理論のプラナー極限を再現する．

ここでさらに，有限体積 V をもつ d 次元トーラス T^d 上のラージ N 還元について見てみる．この場合，上で見た還元模型における非プラナーダイアグラムに対する抑制がなくなる．この問題を解決するために，以下のように還元模型を変形する．紫外の運動量カットオフ $2\pi/v^{1/d}$ をある整数 n に対して

$$
v=V/n
\tag{3.74}
$$

となるように導入する．これは実空間を n 個の体積 v の d 次元立方体のセルに

分けていると解釈できる．T^d 上の関数空間は n 次元のベクトル空間として表される．このベクトル空間と k 次元のベクトル空間のテンソル積を考え，$N=nk$ とおく．N はテンソル積空間の次元にほかならない．演算子 $\hat{\phi}$ はこのテンソル積空間に作用するとする．すなわち，$\phi(x,x')$ は足を持つようになる．

$$\phi(x,x') \to \phi(x,x')_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta=1,\cdots,k). \tag{3.75}$$

(3.58) と (3.60) において，$\hat{P}_\mu$ は $\hat{P}_\mu \otimes 1_k$ に置き換わり，Tr はこのテンソル積空間上のトレースとみなされる．(3.60) の下のすべての式はこのレシピによって変えられる．そして，還元模型で以下の極限をとる．

$$n\to\infty,\ \ k\to\infty,\ \ \kappa\to 0,\quad \text{ここで}\ \lambda=\kappa^2 N=\kappa^2 nk\ \ \text{固定}. \tag{3.76}$$

すると，非プラナーダイアグラムはプラナーダイアグラムと比べて少なくとも $1/k^2$ で抑制される．(3.71) と (3.72) が $\hat{\phi}(x)=e^{i\hat{P}_\mu x^\mu \otimes 1_k}\hat{\phi}e^{-i\hat{P}_\nu x^\nu \otimes 1_k}$ のもとで，(3.76) の極限において成り立つことを確かめることができる．こうして，変形された還元模型は元の場の理論のプラナー極限を再現する．T^d はコンパクト連結リー群である $U(1)^d$ と同一視される．次の節で，$U(1)^d$ についての結果を一般のコンパクト連結リー群の場合に拡張する．

最後に，ラージ N 還元における自由度の勘定について述べる．体積を大きくしていく場合，行列のサイズ N は場の理論の自由度の数に比例する．今具体的に紫外のカットオフを止めたとき，今までの議論からわかるように，$N \propto V$ である．一方，第 5 章で見る非可換空間上の場の理論を行列模型で表したとき，あるいはツイスト還元模型のときは $N^2 \propto V$ である．行列の自由度は N^2 に比例するから，後者ではすべて自由度に使われている *6)．両者とも，ゲージ群のラージ N の自由度は必要ないから，その意味で自由度が還元している．ただし，有限体積の場合，ゲージ群の自由度 1_k を導入するので，自由度の還元になっていない．通常の還元模型では，自由度を損している．しかし，3.6 節や 5.3 節で見るように，格子などの他の非摂動的な定式化では保てない系の対称性を保てる場合などは実際に大いに役立つのである．

3.5 群多様体上のラージ N 還元

この節では，**群多様体**上のラージ N 還元を調べる [34], [35]．前節の平坦な空間上の場合と議論は平行に進むことがわかる．

G を**コンパクト連結リー群**とし，t_a $(a=1,\cdots,\dim G)$ をそのリー代数の生成子とする．t_a は交換関係

*6) この意味で成立すればツイスト還元模型は通常の還元模型より実践上で有利である．第 5 章を参照．

$$[t_a, t_b] = i f_{ab}{}^c t_c \tag{3.77}$$

を満たす．G 上の関数空間を考え，その座標基底を $|g\rangle$ $(g \in G)$ と表す．$h \in G$ に対して，G における左移動は

$$\hat{U}_L(h)|g\rangle = |hg\rangle, \quad \langle g|\hat{U}_L(h) = \langle h^{-1}g| \tag{3.78}$$

と表され，右移動は

$$\hat{U}_R(h)|g\rangle = |gh^{-1}\rangle, \quad \langle g|\hat{U}_R(h) = \langle gh| \tag{3.79}$$

と表される．G 上の関数 $\psi(g) = \langle g|\psi\rangle$ はこれらの移動のもとで

$$\begin{aligned}(\hat{U}_L(h)\psi)(g) &= \langle g|\hat{U}_L(h)|\psi\rangle = \langle h^{-1}g|\psi\rangle = \psi(h^{-1}g),\\ (\hat{U}_R(h)\psi)(g) &= \langle g|\hat{U}_R(h)|\psi\rangle = \langle gh|\psi\rangle = \psi(gh)\end{aligned} \tag{3.80}$$

と変換される．左（右）移動の生成子 $\hat{L}_a$ $(\hat{K}_a)$ を $e^{i\epsilon t_a}$ によって生成される無限小変換によって定義する．

$$e^{i\epsilon \hat{L}_a} = \hat{U}_L(e^{i\epsilon t_a}), \quad e^{i\epsilon \hat{K}_a} = \hat{U}_R(e^{i\epsilon t_a}). \tag{3.81}$$

t_a の交換関係を使って，

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i f_{ab}{}^c \hat{L}_c, \quad [\hat{K}_a, \hat{K}_b] = i f_{ab}{}^c \hat{K}_c, \quad [\hat{L}_a, \hat{K}_b] = 0 \tag{3.82}$$

が成り立つことを見るのは易しい．$\hat{L}_a$ $(\hat{K}_a)$ は右（左）不変のキリングベクトルである．$\hat{L}_a$ と $\hat{K}_a$ は G 上の関数に微分演算子として作用する．これらを $\mathcal{L}_a$ と $\mathcal{K}_a$ で表す．

$$\begin{aligned}\hat{L}_a|g\rangle &= -\mathcal{L}_a|g\rangle, \quad \langle g|\hat{L}_a = \mathcal{L}_a\langle g|,\\ \hat{K}_a|g\rangle &= -\mathcal{K}_a|g\rangle, \quad \langle g|\hat{K}_a = \mathcal{K}_a\langle g|.\end{aligned} \tag{3.83}$$

これらの式は (3.59) の対応物である．右不変の 1 形式 e^a と左不変の 1 形式 s^a が

$$d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i e^a \mathcal{L}_a = i s^a \mathcal{K}_a, \tag{3.84}$$

によって定義される．ここで，x^μ $(\mu = 1 \cdots, \dim G)$ は G をパラメトライズする座標である．(3.82) から，不変 1 形式は Maurer-Cartan 方程式を満たすことがわかる．

$$de^a - \frac{1}{2} f_{bc}{}^a e^b \wedge e^c = 0, \quad ds^a - \frac{1}{2} f_{bc}{}^a s^b \wedge s^c = 0. \tag{3.85}$$

左右不変な計量 $h_{\mu\nu}$ が e^a または s^a によって定義される [*7)]．

*7) 一般に，不変計量が任意の不変 2 階対称テンソルより定義される．δ_{ab} がそのようなテンソルなので，簡単のためここではこれを用いる．

$$h_{\mu\nu} = e^a_\mu e^a_\nu = s^a_\mu s^a_\nu. \tag{3.86}$$

G の Haar 測度は

$$dg = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{\dim G}, \tag{3.87}$$

によって与えられる．多様体の体積は

$$V = \int dg \tag{3.88}$$

であり，これは有限である．

G 上のスカラー ϕ^3 理論を考える．$h^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = -(\mathcal{L}_a\phi)^2$ であることに注意して，作用を書き下す．

$$S = \int dg \ \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_a\phi(g))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi(g)^2 + \frac{1}{3}\kappa\phi(g)^3\right). \tag{3.89}$$

$\phi(g)$ はその要素が G 上の関数である $N \times N$ エルミート行列である．理論は $G \times G$ 対称性を持つ．すなわち，理論は次の変換のもとで不変である．

$$\begin{aligned} \phi'(g) &= (\hat{U}_L(h)\phi)(g), \\ \phi'(g) &= (\hat{U}_R(h)\phi)(g). \end{aligned} \tag{3.90}$$

ここでは，プラナー（トフーフト）極限 (3.55) をとる．プロパゲーターは次の形をとる．

$$\langle \phi(g_1)_{ij}\phi(g_2)_{kl}\rangle = \Delta(g_1 g_2^{-1})\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.91}$$

$\Delta(g)$ の詳細な形は以下の議論には必要ない．

(3.89) の還元模型を次のように定義する．T^d の場合と同様に，G 上の関数の空間と k 次元ベクトル空間のテンソル積空間を考える．G 上で還元模型を得る規則は，(3.58) に類似しており，

$$\phi(g) \to \hat{\phi}, \quad \mathcal{L}_a \to [\hat{L}_a \otimes 1_k, \ ], \quad \int dg \to v, \tag{3.92}$$

である．ここで，$\hat{\phi}$ はテンソル積空間に作用するエルミート演算子であり，Tr はテンソル空間でのトレースである．以下では，記法の簡便化のために $\otimes 1_k$ をしばしば省略する．(3.92) を (3.89) に適用すると，還元模型が得られる．

$$S_r = v\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}[\hat{L}_a, \hat{\phi}]^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{3}\kappa\hat{\phi}^3\right). \tag{3.93}$$

還元模型も

$$\hat{\phi}' = \hat{U}_L(h_L)\hat{U}_R(h_R)\hat{\phi}\hat{U}_R(h_R^{-1})\hat{U}_L(h_L^{-1}) \tag{3.94}$$

で与えられる $G \times G$ 対称性を持つ．

作用を座標基底を使って表すために，$\hat{\phi}$ の行列要素を $\langle g|\hat{\phi}|g'\rangle \equiv \phi(g, g')$ と

書く．これは，G 上の 2 局所 $k \times k$ 行列場である．$\hat{\phi}$ のエルミート性は関係式 $\phi(g,g')^\dagger = \phi(g',g)$ に翻訳される．すると，(3.83) を使って，(3.93) は

$$S_r = v\int dgdg' \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\phi(g',g)\left(\mathcal{L}_a^{(g)} + \mathcal{L}_a^{(g')}\right)^2 \phi(g,g') + \frac{1}{2}m^2\phi(g',g)\phi(g,g')\right\} + v\int dgdg'dg''\ \frac{1}{3}\kappa\ \mathrm{tr}(\phi(g,g')\phi(g',g'')\phi(g'',g)), \tag{3.95}$$

と表される．ここで，tr は $k \times k$ 行列に対するトレースである．還元模型は再び G 上の 2 局所場の理論と見ることができる．ここで，(3.64) に対応物である変数変換

$$u = g,\ \ \zeta = g'^{-1}g, \tag{3.96}$$

をして，$\phi(g,g')$ を u と ζ の関数とみなす．ζ が左移動のもとで不変であることに注意すると，

$$\left(\mathcal{L}_a^{(g)} + \mathcal{L}_a^{(g')}\right)\phi(g,g') = \mathcal{L}_a^{(u)}\phi(g,g') \tag{3.97}$$

が成り立つことがわかる．また，Haar 測度は変数変換 (3.96) のもとで不変である．この事実と等式 (3.97) より，プロパゲーターは次の形をとる．

$$\langle\phi(g_1,g_1')_{\alpha\beta}\phi(g_2',g_2)_{\gamma\delta}\rangle = \frac{1}{v}\Delta(g_1g_2^{-1})\delta(g_1'^{-1}g_1, g_2'^{-1}g_2)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}. \tag{3.98}$$

ここで，α, β, γ, $\delta = 1, \cdots, k$ であり，$\delta(g_1,g_2)$ は Haar 測度のもとでのデルタ関数で，任意の $h \in G$ に対して

$$\delta(g_1,g_2) = \delta(g_2,g_1) = \delta(hg_1,hg_2) = \delta(g_1h,g_2h) \tag{3.99}$$

を満たす．(3.98) は (3.66) の対応物であり，G 上の還元模型のプロパゲーターは平坦な空間上のそれと同じ性質を持つことを示している．

プロパゲーターの形 (3.98) とデルタ関数の性質 (3.99) から，G 上の還元模型におけるダイアグラムの計算は平坦な空間上と同様に進むことがわかる．したがって，ラージ N 還元は G 上で成り立つ．

さて，紫外の正則化を考えよう．G 上の関数空間は G の正則表現の表現空間 V_{reg} と同一視される．G の要素はこの表現空間に (3.80) のように作用する．V_{reg} はベクトル空間として次のように分解される [*8)]．

$$V_{reg} = \bigoplus_r V_{r^*} \otimes V_r. \tag{3.100}$$

ここで，r は既約表現をラベルしており，r^* は r の複素共役表現，V_r は r の

*8) これは **Peter-Weyl の定理**より導かれる．Peter-Weyl の定理とは，G 上の関数,$\psi(g)$ は $\psi(g) = \sum_r \sum_{ij} c_{ij}^{[r]} R_{ij}^{[r]}(g)$ のように展開できるというものである．ここで，$R_{ij}^{[r]}(g)$ は既約表現 r の表現行列である．

表現空間を表す．左移動は V_{r^*} に作用し，右移動は V_r に作用する．すなわち，$\hat{L}_a$ と $\hat{K}_a$ は (3.100) に

$$\hat{L}_a = \bigoplus_r L_a^{[r]} \otimes 1_{d_r},$$
$$\hat{K}_a = \bigoplus_r 1_{d_r} \otimes L_a^{[r]}, \tag{3.101}$$

のように作用する．ここで，$L_a^{[r]}$ は r 表現における t_a の表現行列であり，d_r は r 表現の次元である．

理論を正則化するために，次で定義される既約表現の集合 I_Λ を考える．

$$I_\Lambda = \{r; C_2(r) < \Lambda^2\}. \tag{3.102}$$

ここで，Λ はある正の数であり，$C_2(r)$ は表現 r の 2 次のカシミアである．そして，(3.100) と (3.101) における和を I_Λ に制限し，

$$n = \sum_{r\in I_\Lambda} d_r^2,$$
$$v = V/n \tag{3.103}$$

とおく．$\Lambda \to \infty$ 極限は $n \to \infty$ 極限に相当し，Λ は紫外カットオフの役割を果たす．こうして，G 上の関数空間は n 次元のベクトル空間で近似される．(3.93) の中の $\hat{L}_a$ は具体的に

$$\left(\bigoplus_{r\in I_\Lambda} L_a^{[r]} \otimes 1_{d_r}\right) \otimes 1_k \tag{3.104}$$

で与えられる．$G \times G$ 対称性は上の紫外正則化導入後も保存することは特筆すべきである．(3.76) に与えられている極限をとると，関係式 (3.71) が成り立つ．(3.72) の対応物である

$$\frac{1}{N^{q/2+1}}\langle \mathrm{Tr}(\phi(g_1)\phi(g_2)\cdots\phi(g_q))\rangle$$
$$= \frac{1}{N^{q/2+1}}\langle \mathrm{Tr}(\hat{\phi}(g_1)\hat{\phi}(g_2)\cdots\hat{\phi}(g_q))\rangle_r, \tag{3.105}$$

も (3.76) の極限で成り立つ．ここで，$\hat{\phi}(g)$ は $g = e^{i\theta^a t_a}$ に対して

$$\hat{\phi}(g) = e^{i\theta^a \hat{L}_a}\hat{\phi}e^{-i\theta^b \hat{L}_b}, \tag{3.106}$$

で定義される．このように，還元模型 (3.93) は G 上の元の場の理論 (3.89) のプラナー極限を再現する．

次に，群多様体上のゲージ理論のラージ N 還元を考えよう．

まず，G 上のヤン・ミルズ理論の還元模型を考える．G 上のヤン・ミルズ理論を還元模型に直接つながる形で書き下すために，$N \times N$ エルミート行列であるゲージ場 A を e^a によって

$$A = X_a e^a. \tag{3.107}$$

と展開する．すると，場の強さは

$$\begin{aligned} F &= dA + iA \wedge A \\ &= \frac{1}{2}(i\mathcal{L}_a X_b - i\mathcal{L}_b X_a + f_{ab}{}^c X_c + i[X_a, X_b])e^a \wedge e^b, \end{aligned} \tag{3.108}$$

と表せる．ここで，2 行目を得るために (3.84) と (3.85) が使われた．(3.108) の中の $f_{ab}{}^c X_c$ の項は曲率からきており，一般にゲージ場に質量を持たせる．(3.108) と (3.87) を使って，$U(N)$ ヤン・ミルズ理論は $\mathcal{L}_a$ と X_a を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\kappa^2}\int dg \mathrm{Tr}(F \wedge *F) \\ &= -\frac{1}{4\kappa^2}\int dg\ \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_a X_b - \mathcal{L}_b X_a - i f_{ab}{}^c X_c + [X_a, X_b])^2 \end{aligned} \tag{3.109}$$

のように書き換えられる[62]．

(3.92) を (3.109) に適用すると，G 上のヤン・ミルズ理論の還元模型が得られる．

$$\begin{aligned} S_r &= -\frac{v}{4\kappa^2}\mathrm{Tr}([\hat{L}_a, \hat{X}_b] - [\hat{L}_b, \hat{X}_a] - i f_{ab}{}^c \hat{X}_c + [\hat{X}_a \hat{X}_b])^2 \\ &= -\frac{v}{4\kappa^2}\mathrm{Tr}([\hat{L}_a + \hat{X}_a, \hat{L}_b + \hat{X}_b] - i f_{ab}{}^c(\hat{L}_c + \hat{X}_c))^2. \end{aligned} \tag{3.110}$$

ここで，2 行目を得るために (3.82) を使った．この節での議論を繰り返すと，(3.76) の極限をとると，還元模型 (3.110) は元のヤン・ミルズ理論のプラナー極限を再現する．関係式 (3.71) が成り立ち，(3.105) から 2.2 節の議論を繰り返して，ウィルソンループの期待値の間の関係を得るのは易しい．

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(P\exp\left[i\int_c A_\mu(x(\sigma))\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}d\sigma\right]\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(P\exp\left[i\int_c (\hat{L}_a + \hat{X}_a)e^a_\mu(x(\sigma))\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}d\sigma\right]\right)\right\rangle_r. \end{aligned} \tag{3.111}$$

ここで，C は σ でパラメトライズされる G 上の閉路を表す．

3.2 節で見た平坦な空間上のラージ N 還元におけるように，(3.110) の 2 行目で，$\hat{X}_a$ を $\hat{L}_a + \hat{X}_a \to \hat{X}_a$ と再定義する，すなわち $\hat{L}_a$ を $\hat{X}_a$ に吸収すると，

$$S'_r = -\frac{v}{4\kappa^2}\mathrm{Tr}\left([\hat{X}_a, \hat{X}_b] - i f_{ab}{}^c \hat{X}_c\right)^2 \tag{3.112}$$

となる．これは (3.109) をゼロ次元に次元還元した模型にほかならない *9)．同様に，この再定義によって，(3.111) の右辺のウィルソンループは左辺のウィルソンループの次元還元になる．この再定義は次のように言い換えられる．還元模型 (3.110) は (3.112) を (3.112) の古典的真空 $\hat{X}_a = \hat{L}_a$ のまわりで展開することにより得られる．こうして，ヤン・ミルズ理論のプラナー極限はそれをゼ

*9) この次元還元はいわゆる consistent truncation になっている[35]．

ロ次元に次元還元して得られる行列模型で記述されるというラージ N 還元が群多様体上でも少なくとも形式的には成立する．

平坦な空間上の場合は背景 $\hat{P}_\mu$ は不安定であった．今の場合，G は半単純であれば，(3.110) はマッシブになっているため，背景 $\hat{L}_a$ は結合定数のすべての次数で安定になりうる．さらに，(3.112) において $\hat{X}_a$ が G に任意の N 次元ユニタリー表現（一般には可約）の生成子ならば古典的真空となるが，他の古典解へのトンネリングはラージ k 極限で抑制される．よって，(3.112) を $\hat{L}_a$ のまわりで展開するだけでよい可能性がある．

3.6 $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の非摂動的定式化

この節では，前節の結果を $R\times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論に適用する [34]．(ラージ N 還元を使ったもう 1 つの定式化 [36] については 5.3 節で見る．) この理論は超共形対称性 $PSU(2,2|4)$ を持つ．この代数は 32 個の超対称電荷を含む．この理論はコンフォーマル写像（ワイル変換）を通じて R^4 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論に等価となる．この還元模型は $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論のプラナー極限の非摂動的定式化となり，**AdS/CFT** 対応の研究において重要である *10)．

ここでは，S^3 を $SU(2)$ 群多様体とみなす．S^3 のアイソメトリーである $SO(4)=SU(2)\times SU(2)$ は左移動と右移動に対応する．$SU(2)$ の要素はオイラー角でパラメトライズされる．

$$g=e^{-i\varphi\sigma_3/2}e^{-i\theta\sigma_2/2}e^{-i\psi\sigma_3/2}, \tag{3.113}$$

ここで，σ_a $(a=1,2,3)$ はパウリ行列であり，

$$\begin{aligned}&0\le\theta\le\pi,\\&0\le\varphi<2\pi,\\&0\le\psi<4\pi\end{aligned}$$

である．右不変キリングベクトルは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1&=-i\left(-\sin\varphi\partial_\theta-\cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\partial_\psi\right),\\ \mathcal{L}_2&=-i\left(\cos\varphi\partial_\theta-\cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\partial_\psi\right),\\ \mathcal{L}_3&=-i\partial_\varphi\end{aligned} \tag{3.114}$$

で与えられ，交換関係

*10) 格子理論による $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の非摂動的定式化の提案については [40]～[43] を参照．

$$[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = i\epsilon_{abc}\mathcal{L}_c \tag{3.115}$$

を満たす．右不変 1 形式は

$$\begin{aligned} e^1 &= -\sin\varphi d\theta + \sin\theta\cos\varphi d\psi, \\ e^2 &= \cos\varphi d\theta + \sin\theta\sin\varphi d\psi, \\ e^3 &= d\varphi + \cos\theta d\psi \end{aligned} \tag{3.116}$$

で与えられ，Maurer-Cartan 方程式

$$de^a - \frac{1}{2}\epsilon_{abc}e^b \wedge e^c = 0 \tag{3.117}$$

を満たす．不変計量は

$$ds^2 = e^a e^a = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 + (d\psi + \cos\theta d\varphi)^2 \tag{3.118}$$

である．S^3 の半径は 2 に固定されている．Haar 測度は

$$dg = \sin\theta d\theta d\varphi d\psi \tag{3.119}$$

であり，群多様体の体積は

$$V = 16\pi^2 \tag{3.120}$$

である．

$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の作用は 10 次元の記法で

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\kappa^2}\int dtdg\ \mathrm{Tr}\biggl(&\frac{1}{4}F_{\hat\mu\hat\nu}F^{\hat\mu\hat\nu} + \frac{1}{2}D_{\hat\mu}X_m D^{\hat\mu}X_m \\ &+ \frac{1}{8}X_m^2 - \frac{1}{4}[X_m, X_n]^2 \\ &+\frac{1}{2}\Psi^\dagger D_t\Psi + \frac{i}{2}\Psi^\dagger\gamma^a e_a^\mu D_\mu\Psi - \frac{1}{2}\Psi^\dagger\gamma^m[X_m, \Psi]\biggr) \end{aligned} \tag{3.121}$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} &\mu = \theta, \varphi, \psi, \\ &\hat\mu, \hat\nu = t, \theta, \varphi, \psi, \\ &m, n = 4, \cdots, 9 \end{aligned} \tag{3.122}$$

である．共変微分は

$$D_{\hat\mu} = \nabla_{\hat\mu} + i[A_{\hat\mu},\ ] \tag{3.123}$$

で定義される．ここで，∇_μ はフェルミオンに対してはスピン接続を含む．随伴表現のスカラー X_m の質量項は共形スカラーの S^3 のスカラー曲率への結合

からくる．さて，前節で見た一般の群多様体上の次元還元をこの理論に適用し，R 上の理論を得よう．ここでは，時間方向は還元せず残す．こうして得られる理論は[44],[45]で指摘されたように **plane wave 行列模型** (PWMM)[46] の形をとる．こうして，$R\times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の還元模型は

$$
\begin{aligned}
S_r = \frac{v}{\kappa^2}\int dt\,\mathrm{Tr}\biggl[&\frac{1}{2}(D_tX_M)^2 - \frac{1}{4}[X_M,X_N]^2 \\
&+\frac{1}{2}\Psi^\dagger D_t\Psi - \frac{1}{2}\Psi^\dagger\gamma^M[X_M,\Psi] \\
&+\frac{1}{2}(X_a)^2 + \frac{1}{8}(X_m)^2 + i\epsilon_{abc}X_aX_bX_c + \frac{3i}{8}\Psi^\dagger\gamma^{123}\Psi\biggr]
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

で与えられる．ここで，M,N は 1 から 9 を走る．A_t と X_M と Ψ は R をパラメトライズする t に依存する $N\times N$ 行列である．これらの行列についているハットは省いた．第 2 項の $M,N=1,2,3$ の部分と第 5 項（X_a の質量項）と第 7 項（**Myers 項**）は (3.112) に対応して

$$
-\frac{v}{4\kappa^2}\int dt\mathrm{Tr}([X_a,X_b]-i\epsilon_{abc}X_c)^2 \tag{3.125}
$$

とまとまる．これは $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 項に由来する．第 8 項（Ψ の質量項）の質量はスピン接続からくる．行列模型 (3.124) は $PSU(2,2|4)$ の部分群である $SU(2|4)$ の対称性をもっている．この代数の 16 個の超対称電荷を含む．

(3.125) からわかるように，X_a が $SU(2)$ の任意の既約表現で与えられるとき，(3.124) の古典解（古典的真空）になるが，これらの解は $SU(2|4)$ 対称性を保ち，すべて縮退している．(3.104) に従って，次の古典的真空を選び，そのまわりで (3.124) を展開する．

$$
L_a = \begin{pmatrix} L_a^{[0]} & & & \\ & L_a^{[1/2]}\otimes 1_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_a^{[K]}\otimes 1_{2K+1} \end{pmatrix}\otimes 1_k. \tag{3.126}
$$

ここで，$L_a^{[j]}$ はスピン j 表現における $SU(2)$ の生成子の表現行列である．パラメータは

$$
\begin{aligned}
&\Lambda \simeq K, \\
&n = \sum_{j=0}^{K}(2j+1)^2, \\
&N = nk
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

で与えられ，(3.76) の極限をとる．(3.126) は (3.104) のところで述べたように，S^3 のアイソメトリーである $SO(4)$ 対称性を保っている．還元模型 (3.124) は

$SU(2) \times SU(2|4)$ 対称性とゲージ対称性を保つ正則化を与える．これは 16 個の超対称性を保つことを意味する．元の理論は超対称共形対称性 $PSU(2,2|4)$ を持ち，32 個の超対称電荷を持つが，任意の正則化で共形対称性は壊れるので，16 個は保てる超対称性の最大の数である．これは超対称性ゲージ理論の格子理論においては保てる超対称性の数は 1 ないし 2 であることを考えると，プラナー極限に限るが画期的なことであると言える．背景 (3.126) のまわりの理論はマッシブな理論であり，古典的にはモデュライがなくこの背景は古典的に安定である．量子論的には 16 個の超対称電荷をもつ $SU(2|4)$ 対称性を保つため，摂動論的にはこの背景は安定であることが保証される[47]．さらに，インスタントン効果による他の真空への遷移は $k \to \infty$ 極限により抑えられる．また，16 個の最大の超対称性を保っているため，$PSU(2,2|4)$ 対称性は微調整なしに回復することが十分に期待できる．こうして，還元模型 (3.124) を (3.126) のまわりで展開し，(3.76) の極限をとると，$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ理論のプラナー極限を再現する．

第 4 章
行列模型におけるT双対

この章では「行列模型における **T** 双対」あるいは「行列模型における**コンパクト化**」あるいは「行列模型における**オービフォルディング**」と呼ばれるものについて解説する．高次元から次元還元して得られた低次元のゲージ理論から元の高次元のゲージ理論を得る手続きであるが，行列から空間が出現していると見ることができる．前章で見たラージ N 還元とは異なり，得られる高次元のゲージ理論は有限の N も可能である．ただし，オービフォルド条件と呼ばれる条件を行列の配位に手で課さなければならず，ラージ N 還元の場合のように「自然に」高次元の理論が得られるわけではない．超弦理論の文脈では，D ブレーンの低エネルギー有効理論の T 双対のもとでの振舞いと見ることができる．4.1 節では，これに則して解説する．4.2 節では，行列模型におけるオービフォルディングの重要な応用である格子上の超対称ゲージ理論の構築について述べる．

4.1　D ブレーン有効作用と T 双対

まず，超弦理論における T 双対について復習しておこう．ここでは，IIA 型および IIB 型超弦理論を念頭において話を進める．$X^M(\tau,\sigma)$　$(M=0,1,\cdots,9)$ を弦の世界面の標的空間への埋め込みを表す写像とする．ここで，τ，σ は世界面のそれぞれ時間的，空間的座標である．今，q 方向（q は 1 から 9 のうちのどれか）は半径 R の S^1 にコンパクト化されているとする．すなわち，

$$X^q(\tau,\sigma)\sim X^q(\tau,\sigma)+2\pi R \tag{4.1}$$

であるとする．T 双対とは

$$\partial_\tau X^q \leftrightarrow \partial_\sigma X^q, \tag{4.2}$$

$$R\leftrightarrow \tilde{R}=\frac{1}{2\pi R} \tag{4.3}$$

のもとでの理論の不変性を言う．もう少し，正確に言うと，この変換のもとで**IIA 型超弦理論**と**IIB 型超弦理論**はお互いに移りあう *1)．(4.2) からわかるように，T 双対のもとで，弦の重心の q 方向の運動量と q 方向の巻きつき数は入れ替わる．

さて，D ブレーンは開弦が端がくっつける物体であるが，世界面が $p+1$ 次元のものを Dp ブレーンという．Dp ブレーンがあるときに，開弦の境界条件は

$$\partial_\sigma X^M(\tau,0) = \partial_\sigma X^M(\tau,\pi) = 0 \quad (M = 0,1,\cdots,p), \tag{4.4}$$

$$\partial_\tau X^M(\tau,0) = \partial_\tau X^M(\tau,\pi) = 0 \quad (M = p+1,\cdots,9). \tag{4.5}$$

(4.4) は Neumann 条件，(4.5) は Dirichlet 条件である．安定な D ブレーンとしては，IIA 型では p は偶数が許され，IIB 型では奇数が許される．(4.2) からわかるように，T 双対のもとでは，Neumann 条件と Dirichle 条件が入れ替わる．(4.2) で，$q=1,\cdots,p$ のとき，すなわち T 双対をとる方向が D ブレーンの世界体積に含まれるときは T 双対のもとで Dp ブレーンは D$(p-1)$ ブレーンになり，$q=p+1,\cdots,9$ のとき，すなわち T 双対をとる方向が D ブレーンの世界体積に含まれないときは Dp ブレーンは D$(p+1)$ ブレーンになる．図 4.1 は D ブレーンの T 双対の様子を表す．y 方向は半径 R の S^1 にコンパクト化されている．$-\infty < y < \infty$ で周期 $2\pi R$ の配位を考えることにより，コンパクト化を実現している．すなわち，$R/Z \simeq S^1$ としている．Dp ブレーンが 3 枚重なっており，y 方向は世界体積に含まれていない．図には，開弦が 2 種類描かれている．片方は S^1 に巻きついていないが，もう片方は巻きついている．T 双対により，半径が $\tilde{R} = 1/(2\pi R)$ の S^1 に巻きついた D$(p+1)$ ブレーンが得られる．

D ブレーンの有効作用は **Dirac-Born-Infeld 作用**で与えられることが知られている．低エネルギーで微分を 2 階までに限ると，それはゲージ理論で近似できる．Dp ブレーンに対しては，10 次元の $\mathcal{N}=1$ $U(k)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を $p+1$ 次元に次元還元したものが，低エネルギー有効理論になる [48]．ここで，k は重なった D ブレーンの枚数に等しい．10 次元の $\mathcal{N}=1$ $U(k)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の作用のボゾン部分だけ書くと

$$S = -\frac{1}{4g^2}\int d^{10}x \mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN}) \tag{4.6}$$

となる．以下の議論では簡単のためフェルミオン場を含む部分は省略する．(4.6) を $p+1$ 次元に次元還元して，Dp ブレーンの有効作用を得る．$A_m = \phi_m \quad (m = p+1,\cdots,9)$ として，

$$S = \frac{1}{g^2}\int d^{p+1}x \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\phi_m D^\mu\phi_m - [\phi_m,\phi_n]^2\right) \tag{4.7}$$

*1) ここでは，世界面上のフェルミオン場の変換は省略している．

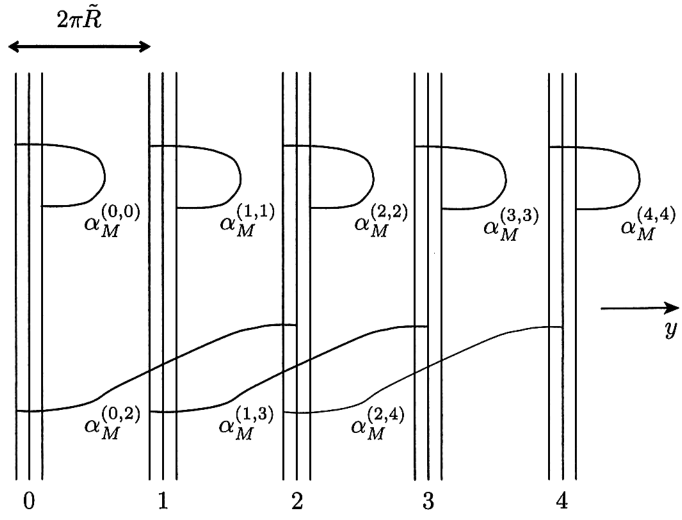


図 4.1　D ブレーンの T 双対.

となる．ここで，$\mu = 0, 1, \cdots, p$ であり，

$$D_\mu \phi_m = \partial_\mu \phi_m + i[A_\mu, \phi_m] \tag{4.8}$$

である．ϕ_m は $k \times k$ のエルミート行列であるが，その k 個の固有値は k 枚の D ブレーンの世界体積に垂直な m 方向での位置をそれぞれ表す．

以下では，$p+1$ 方向が図 4.1 の y 方向であるとする．この状況を実現するためには，(4.7) で $U(k)$ の代わりに $U(\infty)$ を考えて，次のようなオービフォルド条件を課せばよい．

$$UA_\mu U^{-1} = A_\mu, \tag{4.9}$$

$$U\phi_{p+1}U^{-1} = \phi_{p+1} + 2\pi R, \tag{4.10}$$

$$U\phi_{\hat{m}}U^{-1} = \phi_{\hat{m}} \quad (\hat{m} = p+2, \cdots, 9). \tag{4.11}$$

ここで，U は $p+1$ 方向の並進演算子で，

$$U = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0_k & \mathbb{1}_k & & & \\ & & 0_k & \mathbb{1}_k & & \\ & & & 0_k & \mathbb{1}_k & \\ & & & & 0_k & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

で与えられる．ここで，0_k は $k \times k$ の零行列，$\mathbb{1}_k$ は $k \times k$ の単位行列である．(4.9)，(4.10)，(4.11) を解くために，ϕ_{p+1} を $k \times k$ のブロックに以下のよう

に分割する．

$$\phi_{p+1}=\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ \cdots & \phi_{p+1}^{(-2,-2)} & \phi_{p+1}^{(-2,-1)} & \phi_{p+1}^{(-2,0)} & \phi_{p+1}^{(-2,1)} & \cdots \\ \cdots & \phi_{p+1}^{(-1,-2)} & \phi_{p+1}^{(-1,-1)} & \phi_{p+1}^{(-1,0)} & \phi_{p+1}^{(-1,1)} & \cdots \\ \cdots & \phi_{p+1}^{(0,-2)} & \phi_{p+1}^{(0,-1)} & \phi_{p+1}^{(0,0)} & \phi_{p+1}^{(0,1)} & \cdots \\ \cdots & \phi_{p+1}^{(1,-2)} & \phi_{p+1}^{(1,-1)} & \phi_{p+1}^{(1,0)} & \phi_{p+1}^{(1,1)} & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

ここで，$\phi_{p+1}^{(s,t)}$ は $k\times k$ 行列である．A_μ と $\phi_{\hat{m}}$ も同様に分割する．(4.10) は次のように解ける．

$$\begin{aligned} \phi_{p+1} &= \hat{\phi}_{p+1}+\tilde{\phi}_{p+1}, \\ \hat{\phi}_{p+1}^{(s,t)} &= 2\pi Rs\delta_{st}, \\ \tilde{\phi}_{p+1}^{(s,t)} &= \tilde{\phi}_{p+1}^{(s+1,t+1)} \equiv \tilde{\phi}_{p+1}^{(s-t)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.9) と (4.11) も同様に解ける．

$$A_\mu^{(s,t)} = A_\mu^{(s+1,t+1)} \equiv A_\mu^{(s-t)}, \tag{4.15}$$

$$\phi_{\hat{m}}^{(s,t)} = \phi_{\hat{m}}^{(s+1,t+1)} \equiv \phi_{\hat{m}}^{(s-t)}. \tag{4.16}$$

図 4.1 にあるように，$s-t$ は巻きつき数に対応している．

ここで，T 双対に対応して，巻きつき数を運動量に変えるフーリエ変換を行い，$p+2$ 次元の場を定義する．

$$a_\mu(x,y)=\sum_s A_\mu^{(s)}(x)e^{i\frac{s}{\tilde{R}}y}, \tag{4.17}$$

$$a_{p+1}(x,y)=\sum_s \tilde{\phi}_{p+1}^{(s)}(x)e^{i\frac{s}{\tilde{R}}y}, \tag{4.18}$$

$$\Phi_{\hat{m}}(x,y)=\sum_s \phi_{\hat{m}}^{(s)}(x)e^{i\frac{s}{\tilde{R}}y}. \tag{4.19}$$

ここで，$\tilde{R}=1/(2\pi R)$ である．これらを用いて，(4.7) の各項を書き直す．

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu})^{(s,t)} &= \partial_\mu A_\nu^{(s-t)} - \partial_\nu A_\mu^{(s-t)} \\ &\quad + i\sum_u \left(A_\mu^{(s-u)}A_\nu^{(u-t)} - A_\nu^{(s-u)}A_\mu^{(u-t)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\tilde{R}}\int_0^{2\pi\tilde{R}} dy f_{\mu\nu}(x,y)e^{-i\frac{s-t}{\tilde{R}}y}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
(D_\mu \phi_{p+1})^{(s,t)} &= \partial_\mu \tilde{\phi}_{p+1}^{(s-t)} - i2\pi R(s-t) A_\mu^{(s,t)} \\
&\quad + i \sum_u (A_\mu^{(s-u)} \tilde{\phi}_{p+1}^{(u-t)} - \tilde{\phi}_{p+1}^{(s-u)} A_\mu^{(u-t)}) \\
&= \frac{1}{2\pi \tilde{R}} \int_0^{2\pi \tilde{R}} dy f_{\mu p+1}(x,y) e^{-i\frac{s-t}{\tilde{R}} y}, \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(i[\phi_{p+1}, \phi_{\hat{m}}])^{(s,t)} &= i2\pi R(s-t) \phi_{\hat{m}}^{(s-t)} \\
&\quad + i \sum_u (\tilde{\phi}_{p+1}^{(s-u)} \phi_{\hat{m}}^{(u-t)} - \phi_{\hat{m}}^{(s-u)} \tilde{\phi}_{p+1}^{(u-t)}) \\
&= \frac{1}{2\pi \tilde{R}} \int_0^{2\pi \tilde{R}} dy D_{p+1} \Phi_{\hat{m}}(x,y) e^{-i\frac{s-t}{\tilde{R}} y}, \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

$$
([\phi_{\hat{m}}, \phi_{\hat{n}}])^{(s,t)} = \frac{1}{2\pi \tilde{R}} \int_0^{2\pi \tilde{R}} dy [\Phi_{\hat{m}}, \Phi_{\hat{n}}] e^{-i\frac{s-t}{\tilde{R}} y}. \qquad (4.23)
$$

ここで，

$$
f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + i[a_\mu, a_\nu], \qquad (4.24)
$$

$$
f_{\mu p+1} = \partial_\mu a_{p+1} - \partial_y a_\mu + i[a_\mu, a_{p+1}], \qquad (4.25)
$$

$$
D_{p+1} \Phi_{\hat{m}} = \partial_y \Phi_{\hat{m}} + i[a_{p+1}, \Phi_{\hat{m}}] \qquad (4.26)
$$

である．(4.7) は

$$
S = \frac{1}{\hat{g}^2} \sum_s \int d^{p+1}x dy \ \mathrm{tr} \left(-\frac{1}{4} f_{\hat{\mu}\hat{\nu}} f^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} D_{\hat{\mu}} \Phi_{\hat{m}} D^{\hat{\mu}} \Phi_{\hat{m}} - [\Phi_{\hat{m}}, \Phi_{\hat{n}}]^2 \right) \qquad (4.27)
$$

となる．ここで，$\hat{g}^2 = g^2/R$，$\hat{\mu} = 0, 1, \cdots, p+1$ である．$\sum_s$ は無限大の因子を与えるが，これで割れば，確かに D$(p+1)$ ブレーンの低エネルギー有効作用になっている [49]．

4.2 オービフォルディングと格子上の超対称ゲージ理論

この節では，本質的には前節のものと同じだが，有限サイズの行列で実現され，超対称ゲージ理論の格子理論の構築に利用されるオービフォルディングについて見る [50], [51]．

まず，2 以上の整数 q に対して

$$
\omega_q = e^{\frac{2\pi i}{q}} \qquad (4.28)
$$

とし，クロック行列 U_q とシフト行列 V_q を定義する．

$$U_q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega_q & & & \\ & & \omega_q^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_q^{q-1} \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

$$V_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

これらは，トフーフト・ワイル代数

$$U_q V_q = \omega_q^{-1} V_q U_q \tag{4.31}$$

を満たす．また，

$$U_q^q = 1, \quad V_q^q = 1 \tag{4.32}$$

である．

U_q を用いて，(4.12) に対応する並進演算子を定義する．

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= U_q^\dagger \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q \otimes \mathbf{1}_k \\ \Omega_2 &= \mathbf{1}_q \otimes U_q^\dagger \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q \otimes \mathbf{1}_k \\ &\ \ \vdots \\ \Omega_d &= \underbrace{\mathbf{1}_q \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes U_q^\dagger}_{d} \otimes \mathbf{1}_k. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ω_1 と Ω_2 は $q^d k \times q^d k$ ユニタリー行列である．$q^d k \times q^d k$ 複素行列 Φ_i $(i = 1, \cdots, M)$ に以下のオービフォルド条件を課す．

$$\Omega_a \Phi_i \Omega_a^\dagger = \omega_q^{-r_{i,a}} \Phi_i \quad (a = 1, \cdots, d). \tag{4.34}$$

$r_{i,a}$ は整数である．(4.34) は次の特解を持つ．

$$\Phi_i = \Phi_i^{(0)} = \prod_{a=1}^{d} D_a^{r_{i,a}} \otimes \mathbf{1}_k. \tag{4.35}$$

ここで，

$$D_1 = V_q^\dagger \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q$$
$$D_2 = \mathbf{1}_q \otimes V_q^\dagger \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q$$
$$\vdots$$
$$D_d = \mathbf{1}_q \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes V_q^\dagger \tag{4.36}$$

である．Φ_i をこの特解のまわりで展開する．

$$\Phi_i = \tilde{\Phi}_i \Phi_i^{(0)}. \tag{4.37}$$

(4.34) より，$\tilde{\Phi}_i$ には以下の条件が課される．

$$\Omega_a \tilde{\Phi}_i \Omega_a^\dagger = \tilde{\Phi}_i. \tag{4.38}$$

次に，

$$Z_1 = U_q^\dagger \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q$$
$$Z_2 = \mathbf{1}_q \otimes U_q^\dagger \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q$$
$$\vdots$$
$$Z_d = \mathbf{1}_q \otimes \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes U_q^\dagger \tag{4.39}$$

から，(4.38) を満たす行列の基底を定義する．

$$\Delta(\vec{n}) = \sum_{p_1,\cdots,p_d=0}^{q-1} \prod_{a=1}^{d} Z_a^{p_a} \omega^{\vec{p}\cdot\vec{n}}. \tag{4.40}$$

ここで，$\vec{n} = (n_1, \cdots, n_d)$，$\vec{p} = (p_1, \cdots, p_d)$ である．(4.31) より，

$$D_a \Delta(n_1, \cdots, n_d) D_a^\dagger = \Delta(n_1, \cdots, n_a + 1, \cdots, n_d) \tag{4.41}$$

が成り立つ．また，

$$\mathrm{tr}(U_q^m V_q^l) = \begin{cases} q & (m = l = 0 \mod q) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.42}$$

より，

$$\mathrm{tr}(\Delta(\vec{n}^{(1)})\Delta(\vec{n}^{(2)})\cdots\Delta(\vec{n}^{(l)})) = \begin{cases} q^d & (\vec{n}^{(1)} = \vec{n}^{(2)} = \cdots = \vec{n}^{(l)}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.43}$$

が成り立つ．$\tilde{\Phi}_i$ を

$$\tilde{\Phi}_i = \sum_{n_1,\cdots,n_d}^{q-1} \Delta(\vec{n}) \otimes \phi_i(\vec{n}) \tag{4.44}$$

と展開する．ここで，$\phi_i(\vec{n})$ は $k \times k$ 行列である．以上から，

$$\sum_{i=1}^{M} \vec{r}_i = 0 \quad (\mathrm{mod}\ q) \tag{4.45}$$

のとき,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_M)\\
&= q^d \sum_{n_1,\cdots,n_d=0}^{q-1} \mathrm{tr}(\phi_1(\vec{n})\phi_2(\vec{n}-\vec{r}_1)\cdots\phi_M(\vec{n}-\vec{r}_1-\vec{r}_2-\cdots-\vec{r}_{M-1}))
\end{aligned} \tag{4.46}$$

であり，それ以外のときは左辺は消えることがわかる．ここで，$\vec{r}_i = (r_{i,1},\cdots,r_{i,d}) \quad (i=1,\cdots,M)$ であり，最後の tr は $k\times k$ 行列についてのトレースである．

以上の準備のもと，例として 4 次元ヤン・ミルズ理論の還元模型から 2 次元で随伴表現のスカラー場が 2 個結合したヤン・ミルズ理論の格子理論が得られることを見よう．

$$S = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{tr}([A_\mu, A_\nu]^2) \tag{4.47}$$

から出発する．ここで，$\mu,\nu = 1,\cdots,4$ であり，A_μ は $q^2k\times q^2k$ のエルミート行列であるとする．複素行列

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + iA_3),\\
\Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_2 + iA_4)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

を導入する．(4.47) は Φ_1 と Φ_2 を用いて，

$$S = \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}([\Phi_1,\Phi_1^\dagger]+[\Phi_2,\Phi_2^\dagger])^2 - 2[\Phi_1,\Phi_2][\Phi_1^\dagger,\Phi_2^\dagger]\right) \tag{4.49}$$

と書ける．

$d=2$ として，(4.34) において，

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (1,0),\\
\vec{r}_2 &= (0,1)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

とする．$\Phi_1^\dagger$ と $\Phi_2^\dagger$ の $\vec{r}$ を $\vec{r}_{\bar{1}}$ と $\vec{r}_{\bar{2}}$ とそれぞれ記すと，

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\bar{1}} &= (-1,0),\\
\vec{r}_{\bar{2}} &= (0,-1)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

である．

(4.49) に (4.37) を代入すると，(4.46) を得た計算と同様の計算により，

$$S = \frac{q^2}{g^2} \sum_{\vec{n}} \mathrm{tr} \left(\frac{1}{2} (\phi_1(\vec{n})\phi_1^\dagger(\vec{n}) - \phi_1^\dagger(\vec{n}+\vec{e}_1)\phi_1(\vec{n}+\vec{e}_1) \right.$$
$$+ \phi_2(\vec{n})\phi_2^\dagger(\vec{n}) - \phi_2^\dagger(\vec{n}+\vec{e}_2)\phi_2(\vec{n}+\vec{e}_2))^2$$
$$\left. + 2|\phi_1(\vec{n})\phi_2(\vec{n}-\vec{e}_1) - \phi_2(\vec{n})\phi_1(\vec{n}-\vec{e}_2)|^2 \right). \qquad (4.52)$$

ここで，$\vec{e}_1 = (1, 0)$，$\vec{e}_2 = (0, 1)$ である．これは，サイズが $q \times q$ の 2 次元正方格子上の理論である．

(4.56) が連続極限で，通常の 2 次元ヤン・ミルズ作用に帰着することを以下で見る．格子間隔 a を導入し，

$$a \to 0,$$
$$L = qa \to \infty \qquad (4.53)$$

によって，連続極限と無限体積極限をとる．ϕ_1 と ϕ_2 を古典解 $\frac{1}{a\sqrt{2}}\mathbf{1}_k$ の周りで展開する．

$$\phi_1 = \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_1 + iv_1),$$
$$\phi_2 = \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_2 + iv_2). \qquad (4.54)$$

$x_1 = n_1 a$，$x_2 = n_2 a$ として，$a \to 0$，$L = qa \to \infty$ のとき，

$$s_1(\vec{n}+\vec{e}_1) = s_1(x) + a\partial_1 s_1(x) + \mathcal{O}(a^2),$$
$$a^2 \sum_{\vec{n}} = \int d^2x + \mathcal{O}(a) \qquad (4.55)$$

であることなどを使うと，

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int d^2x \mathrm{tr} \left(\frac{1}{2}(D_1 s_1 + D_2 s_2)^2 + \frac{1}{2}(D_1 s_2 - D_2 s_1)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(v_{12} + i[s_1, s_2])^2 \right) + \mathcal{O}(a)$$
$$= \frac{1}{g_{YM}^2} \int d^2x \mathrm{tr} \left(\frac{1}{2} v_{12}^2 + \frac{1}{2}(D_a s_1)^2 + \frac{1}{2}(D_a s_2)^2 - \frac{1}{2}[s_1, s_2]^2 \right)$$
$$(4.56)$$

となる．ここで，

$$D_a s_1 = \partial_a s_1 - i[v_a, s_1],$$
$$D_a s_2 = \partial_a s_2 - i[v_a, s_2],$$
$$v_{12} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 - i[v_1, v_2],$$
$$g_{YM} = \frac{ga}{q} \qquad (4.57)$$

である．(4.56) は 2 次元 $U(k)$ ヤン・ミルズ理論に随伴表現のスカラー s_1 と s_2

が結合した理論である．実際は，ラージ N 還元の場合と同様に ϕ_1 と ϕ_2 の古典解 $\frac{1}{a\sqrt{2}}\mathbf{1}_k$ が安定でないために，これを安定化し，かつ連続極限では効かない項を導入する必要がある．

(4.47) は 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン・ミルズ理論の還元模型でフェルミオンを落としたものであり，(4.56) は 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論でフェルミオンを落としたものである．2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論は 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン・ミルズ理論の次元還元から得られる．実際，(4.47) でフェルミオンを入れて出発し，フェルミオンに対して適当に $\vec{r}$ を定めると，2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の超対称性の一部を保った格子理論が得られる．このように超対称性の全部ではないが，一部を保つことによって，連続極限ととる時に微調整するパラメータの数を減らすことができるため，オービフォルディングによる超対称ゲージ理論の格子理論の構築は実用上も大変有用である．

最後に，この節のオービフォルディングと前節のそれを比較してみよう．簡単のため，1 次元で考える．前節では，$\tilde{\phi}(p-p')=\langle p|\hat{\phi}|p'\rangle$ が $p-p'$ のみに依存していた．これを x 基底に移すと，

$$
\begin{aligned}
\phi(x,x') &= \langle x|\hat{\phi}|x'\rangle \\
&= \int \frac{dp}{2\pi}\frac{dp'}{2\pi}e^{ipx-ip'x'}\langle p|\hat{\phi}|p'\rangle \\
&= \int \frac{dq}{2\pi}\frac{dl}{2\pi}e^{iq(x-x')+il(x+x')/2}\tilde{\phi}(l) \\
&= \delta(x-x')\phi((x+x')/2)
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

となって，$\phi(x,x')$ は対角的になる．実際，この節では $\tilde{\Phi}_1$ や $\tilde{\Phi}_2$ は $q^2\times q^2$ の行列の空間内では対角的であり，この節では x 基底で見ていることがわかる．$q^2\times q^2$ 行列の対角成分は格子点に対応している．

第 5 章
非可換幾何と行列模型

この章では，**非可換幾何**と行列模型の繋がりについて考察する *1)．例として，**非可換平面**と**非可換球面**という非可換空間を取り上げ，それらの上の場の理論がどのようにして行列模型の中で実現されるかを見る．これは，行列模型における時空の出現の仕方の一つと見ることができる．第 2 章での非臨界次元の弦理論を表す行列模型における出現の仕方は「行列＝座標」であったと言え，第 6 章の超弦理論の行列模型においても同様である．一方，第 3 章でのラージ N 還元と第 4 章での行列模型の T 双対における出現の仕方は「行列＝運動量」であったと言える．これに対して，この章での出現の仕方は言わばこの中間である，すなわち行列は座標とも思えるし，運動量とも思える，ということがわかるであろう．

5.1 非可換平面

この節では，最も簡単は非可換空間である非可換平面を考える．まず，2 次元から始める．偶数高次元への拡張は容易である．

2 次元非可換平面では，その座標を $\hat{x}_1$ と $\hat{x}_2$ とすると，それらが交換しない．

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta. \tag{5.1}$$

ここで，θ は実の定数である．$\theta \to 0$ が可換極限に相当する．$\hat{x}_1$ と $\hat{x}_2$ に付けた ^ は，これらが普通の数（c 数）ではなく，演算子（無限次元の行列）であることを示している．ここで，共役の運動量を次式で定義する．

$$\hat{p}_1 = \theta^{-1}\hat{x}_2, \quad \hat{p}_2 = -\theta^{-1}\hat{x}_1. \tag{5.2}$$

この定義と (5.1) から，以下が満たされることがわかる．

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2). \tag{5.3}$$

*1) 非可換幾何と弦理論の様々な関係については [52] とその中の参考文献を参照されたい．

これは，$\theta=\hbar$ とすると，見かけ上 2 次元での 1 粒子の量子力学における正準交換関係の形をしているが，座標と運動量が独立ではないため，ヒルベルト空間としては 1 次元の量子力学のものを考えていることに注意しよう．また，運動量同士は以下の交換関係を満たす *2)．

$$[\hat{p}_1,\hat{p}_2]=i\theta^{-1}. \tag{5.4}$$

このヒルベルト空間に作用する演算子 $\hat{f}$ は $\hat{x}_i$ を用いて以下のように展開される．

$$\hat{f}=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}f(k)e^{ik\cdot\hat{x}}. \tag{5.5}$$

ここで，$f(k)=f(k_1,k_2)$，$k\cdot\hat{x}=k_i\hat{x}_i$ である．この演算子 $\hat{f}$ に対して，2 次元平面 R^2 上の関数 $f(x)=f(x_1,x_2)$ をを次式により対応させることができる．

$$f(x)=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}f(k)e^{ik\cdot x}. \tag{5.6}$$

$\hat{f}$ と $f(x)$ の関係を直接書けば，

$$\hat{f}=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2xf(x)e^{-ik\cdot x}e^{ik\cdot\hat{x}} \tag{5.7}$$

となる．

(5.3) と (5.7) から，

$$[\hat{p}_i,\hat{f}]=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2x(-i\partial_{x_i}f(x))e^{-ik\cdot x}e^{ik\cdot\hat{x}} \tag{5.8}$$

が成り立つ．ここで，$\partial_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}$ である．これから，$[\hat{p}_i,\ ]$ が R^2 上の関数空間での $-i\partial_{x_i}$ に対応することがわかる．

$$[\hat{p}_i,\ ]\leftrightarrow -i\partial_{x_i}. \tag{5.9}$$

次に，演算子の積を考えよう．

$$\begin{aligned}
\hat{f}\hat{g}&=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2x\int d^2yf(x)g(y)e^{-ik\cdot x}e^{-il\cdot y}e^{ik\cdot\hat{x}}e^{il\cdot\hat{x}}\\
&=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2x\int d^2yf(x)g(y)\\
&\qquad\times e^{-ik\cdot x}e^{-il\cdot y}e^{-\frac{i\theta}{2}(k_1l_2-k_2l_1)}e^{i(k+l)\cdot\hat{x}}\\
&=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2x\int d^2y(e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2}-\partial_{x_2}\partial_{y_1})}f(x)g(y))\\
&\qquad\times e^{-ik\cdot x-il\cdot y}e^{i(k+l)\cdot\hat{x}}\\
&=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2x(e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2}-\partial_{x_2}\partial_{y_1})}f(x)g(y))_{y=x}e^{-k\cdot x}e^{ik\cdot\hat{x}}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

*2) 弦理論の文脈では θ^{-1} は定 B 場（Kalb-Ramond 場）に比例する．

2番目の等式では，Baker-Cambell-Hausdorff の公式の特別な場合，すなわち，$[[A,B],A]=[[A,B],B]=0$ のときに成り立つ公式

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{5.11}$$

を用いた．また，最後の等式では，k と l についての積分を $k+l$ と $(k-l)/2$ に分けて，$(k-l)/2$ についての積分と y についての積分を行った後，$k+l$ を改めて k とおいた．これより，演算子の積がいわゆる Moyal 積（スター積）に対応することがわかる．

$$\hat{f}\hat{g} \leftrightarrow f(x) \star g(x) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x)g(y)|_{y=x}. \tag{5.12}$$

一般に，$f(x) \star g(x) \neq g(x) \star f(x)$ であることは明らかである．また，演算子の積は結合則 $(\hat{f}\hat{g})\hat{h} = \hat{f}(\hat{g}\hat{h})$ を満たすので，Moyal 積も同様に結合則 $(f(x) \star g(x)) \star h(x) = f(x) \star (g(x) \star h(x))$ を満たす．さらに，

$$\frac{1}{i\theta}[f(x), g(x)]_\star = \partial_{x_1} f(x) \partial_{x_2} g(x) - \partial_{x_2} f(x) \partial_{x_2} g(x) + \mathcal{O}(\theta) \tag{5.13}$$

であり，右辺第 1 項はポアッソン括弧である．このように，左辺を θ で展開することにより，交換子を系統的に近似することができる．最後に，演算子のトレースを考える．ヒルベルト空間において，次のような基底を考える．

$$\hat{x}_1|x_1\rangle = x_1|x_1\rangle, \tag{5.14}$$

$$\hat{x}_2|x_2\rangle = x_2|x_2\rangle. \tag{5.15}$$

量子力学とのアナロジーから，

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_1\rangle\langle x_1| = 1, \tag{5.16}$$

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_2\rangle\langle x_2| = 1, \tag{5.17}$$

$$\langle x_1|x_2\rangle = e^{i\theta^{-1}x_1x_2} \tag{5.18}$$

が成り立つ．これらを用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\hat{f}) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{dx'_1}{\sqrt{2\pi\theta}} f(x) e^{-ik\cdot x} \langle x'_1|e^{ik\cdot\hat{x}}|x'_1\rangle \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{dx'_1}{\sqrt{2\pi\theta}} \int \frac{dx'_2}{\sqrt{2\pi\theta}} f(x) e^{-ik\cdot x} e^{-\frac{i\theta}{2}k_1k_2} \\
&\qquad \times \langle x'_1|e^{ik_1\hat{x}_1} e^{ik_2\hat{x}_2}|x'_2\rangle\langle x'_2|x'_1\rangle \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{d^2x'}{2\pi\theta} f(x) e^{-ik\cdot x} e^{-\frac{i\theta}{2}k_1k_2} e^{ik_1x'_1 + ik_2x'_2} \\
&= \int \frac{d^2x}{2\pi\theta} f(x).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

これより，トレースが R^2 上の積分に対応することがわかる．

$$\mathrm{tr} \leftrightarrow \int \frac{d^2x}{2\pi\theta}. \tag{5.20}$$

右辺は量子論的な自由度，すなわち位相空間の体積を $2\pi\hbar$ で割ったものに相当していることに注意されたい．トレースが巡回的であることに対応して，

$$\int d^2x f_1(x) \star f_2(x) \star \cdots \star f_n(x) = \int d^2x f_n(x) \star f_1(x) \star \cdots \star f_{n-1}(x) \tag{5.21}$$

が成り立つ．特に，Moyal 積の形から

$$\int d^2x f(x) \star g(x) = \int d^2x f(x) g(x) \tag{5.22}$$

が成り立つことは明らかであろう．(5.7)，(5.9)，(5.12)，(5.20) が非可換平面上の関数と対応する演算子との対応を与えている．

偶数高次元の場合へ拡張しておこう．d を正の偶数として，

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}. \tag{5.23}$$

ここで，$\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ で，θ_{ij} のランクは d であるとする．このとき，

$$\hat{p}_i = -\theta_{ij}^{-1}\hat{x}_j, \tag{5.24}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \tag{5.25}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = -i\theta_{ij}^{-1} \tag{5.26}$$

であり，$d/2$ 次元の量子力学系のヒルベルト空間上に演算子は定義される．演算子と関数の関係は

$$\hat{f} = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \int d^dx f(x) e^{-ik\cdot x} e^{ik\cdot\hat{x}}, \tag{5.27}$$

$$[\hat{p}_i, \ ] \leftrightarrow -i\partial_{x_i}, \tag{5.28}$$

$$\hat{f}\hat{g} \leftrightarrow f(x) \star g(x) = e^{\frac{i\theta_{ij}}{2}(\partial_{x_i}\partial_{y_j} - \partial_{x_j}\partial_{y_i})} f(x)g(y)|_{y=x}, \tag{5.29}$$

$$\mathrm{tr} \leftrightarrow \int \frac{d^dx}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\theta_{ij})}} \tag{5.30}$$

で与えられる．

さらに，(5.28) より

$$\begin{aligned} e^{ia^i\hat{p}_i}\hat{\phi}e^{-ia^i\hat{p}_i} =& \hat{\phi} + ia^i[\hat{p}_i, \hat{\phi}] + \frac{i^2}{2!}a^ia^j[\hat{p}_i, [\hat{p}_j, \hat{\phi}]] \\ &+ \frac{i^3}{3!}a^ia^ja^k[\hat{p}_i, [\hat{p}_j, [\hat{p}_k, \hat{\phi}]]] + \cdots \end{aligned} \tag{5.31}$$

なので，

$$e^{ia^i\hat{p}_i}\hat{\phi}e^{-ia^i\hat{p}_i} \leftrightarrow \phi(x) + a^i\partial_{x^i}\phi(x) + \frac{1}{2!}a^ia^j\partial_{x^i}\partial_{x^j}\phi(x) + \frac{1}{3!}a^ia^ja^k\partial_{x^i}\partial_{x^j}\partial_{x^k}\phi(x) + \cdots = \phi(x+a) \tag{5.32}$$

となり，このように非可換空間での並進が表される．

さて，以下のような「外場」$\hat{p}_i$ が入った（無限次元行列からなる）行列模型を考えよう．

$$S = \sqrt{(2\pi)^d \det(\theta_{ij})}\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{2}[\hat{p}_i, \hat{\phi}]^2 + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^4\right). \tag{5.33}$$

ここで，$i = 1, \cdots, d$ で，$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = -i\theta_{ij}^{-1}$ であるとする．上で述べた対応関係より，これは次のような d 次元非可換平面上の場の理論になる．

$$S = \int d^dx \left(\frac{1}{2}(\partial_{x_i}\phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4}\phi(x)\star\phi(x)\star\phi(x)\star\phi(x)\right). \tag{5.34}$$

場の 2 次の項は通常の ϕ^4 理論と変わらず，相互作用項が Moyal 積で書けている．このように，「微分を $\hat{p}_i$ との交換子に置き換える」ことにより，非可換空間上の場の理論は行列模型で表現できる．観測量としては，(5.29)，(5.30)，(5.32) を用いて，

$$\mathrm{tr}(e^{ix_1^i\hat{p}_i}\hat{\phi}e^{-ix_1^i\hat{p}_i}e^{ix_2^j\hat{p}_j}\hat{\phi}e^{-ix_2^j\hat{p}_j}\cdots e^{ix_n^k\hat{p}_k}\hat{\phi}e^{-ix_n^k\hat{p}_k} = \int \frac{d^dx}{\sqrt{(2\pi)^d\det(\theta_{ij})}}\phi(x+x_1)\star\phi(x+x_2)\star\cdots\star\phi(x+x_n) \tag{5.35}$$

を考えられる．(この演算子の期待値をとると，並進対称性より積分は全体にかかる因子になる.)

ゲージ理論（ヤン・ミルズ理論）の場合はどうだろうか[53]．第 3 章のラージ N 還元のところでもそうであったように，0 次元に次元還元して得られる行列模型の背景場として，$\hat{p}_i$ は吸収されるだろう．具体的に，d 次元のヤン・ミルズ理論を 0 次元に次元還元して得られる行列模型と（少なくとも形式的には）等価な行列模型

$$S = -\frac{\sqrt{(2\pi)^d\det(\theta_{ij})}}{4g^2}\mathrm{tr}([\hat{A}_i, \hat{A}_j] + i\theta_{ij}^{-1})^2 \tag{5.36}$$

から出発して，

$$\hat{A}_i = \hat{p}_i + \hat{a}_i \tag{5.37}$$

のように，$\hat{p}_i$ のまわりで展開する．$\hat{A}_i = \hat{p}_i$ は (5.26) を満たすので，(5.36) の古典的真空になっている．このように展開すると，

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] \leftrightarrow -i(F_{\star ij} + \theta_{ij}) \tag{5.38}$$

の対応があることがわかる．ここで，

$$F_{\star ij} = \partial_{x_i} a_j - \partial_{x_j} a_i + i a_i \star a_j - a_j \star a_i \tag{5.39}$$

である．これより，

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^d x (F_{\star ij})^2 \tag{5.40}$$

となり，d 次元非可換空間上の $U(1)$ ヤン・ミルズ理論が得られる．$U(1)$ であるが，Moyal 積により，相互作用が消えていないことに注意されたい．((5.39) を見よ.) なお，$U(k)$ の理論を得るためには，(5.36) で，

$$\hat{A}_i = \hat{p}_i \otimes \mathbb{1}_k + \hat{a}_i \tag{5.41}$$

と展開すればよい．このとき，(5.36) は

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^d x \mathrm{tr} (F_{\star ij})^2 \tag{5.42}$$

となる．ここで，$F_{\star ij}$ の定義 (5.39) において a_i は $k \times k$ のエルミート行列であり，tr は $k \times k$ 行列のトレースを表す．

自由度の勘定であるが，ヒルベルト空間の次元すなわち行列のサイズを N とし，全空間の体積を V とすると，$N \propto \sqrt{V}$ であることがわかるだろう．すなわち，3.4 節で述べたように，$N^2 \propto V$ である．

ここで，非可換空間上のゲージ理論におけるゲージ不変な観測量であるウィルソンラインを構成しておこう [54]．行列模型では，ゲージ不変な演算子として自然にウィルソンループ

$$\hat{W}[x(\sigma)] = \sqrt{(2\pi)^d \det(\theta_{ij})} \mathrm{tr} \left(P \exp \left[i \int_0^1 d\sigma x'^i(\sigma) \hat{A}_i \right] \right) \tag{5.43}$$

が自然に考えられる．

$$U(\sigma) = P \exp \left[i \int_0^\sigma d\sigma' x'^i(\sigma') \hat{A}_i \right] \tag{5.44}$$

と定義すると，2.2 節の議論と同様の議論から，

$$U(\sigma) = P \exp \left[i \int_0^\sigma d\sigma' x'^i(\sigma') \hat{a}_i(x(\sigma')) \right] P \exp \left[i \int_0^\sigma d\sigma' x'^i(\sigma') \hat{p}_i \right] \tag{5.45}$$

と書けることがわかる．ここで，$\hat{a}_i(x(\sigma))$ は (3.27) の対応物である．(5.24), (5.35) より，

$$\begin{aligned} &\hat{W}[x(\cdot)] \\ &= \int d^d x \left(P \exp \left[i \int_0^1 d\sigma x'^i(\sigma) a_i(x + x(\sigma) - x(0)) \right] e^{-i\theta^{-1}_{ij} l^i x^j} \right)_\star . \end{aligned} \tag{5.46}$$

ここで，

$$l^i = x^i(1) - x^i(0) \tag{5.47}$$

である．$l^i \neq 0$ のときは，これは開いたウィルソンラインである．この演算子の持つ運動量は

$$K^i = \theta_{ij}^{-1} l^j \tag{5.48}$$

である．演算子の拡がり l^i と運動量 K^i の間に関係がつく．非可換空間上では運動量がゼロでないゲージ不変な演算子は局所的にはならず，θ_{ij} が反対称であることからわかるように，運動量と直交する方向に拡がる．また，次に見るように非可換空間上の場の理論では UV と IR に関係がつく．これらの事実は空間の非可換性が (5.2) のように運動量と座標を関係付けている，すなわち行列が運動量とも座標とも思えるということに起因している．

最後に，非可換空間上の場の量子論の重要な性質である **UV/IR mixing** [55] について述べておこう．簡単のため，$d=2$ の (5.34) を考える．これをフーリエモードで書き換えると，

$$\begin{aligned}
S &= S_{free} + S_{int}, \\
S_{free} &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q) \frac{1}{2}(p^2+m^2)\phi(p)\phi(q), \\
S_{int} &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q+r+s) \\
&\quad \times e^{\frac{i\theta}{2}(p_1q_2 - p_2q_1 + (p_1+q_1)(r_2+s_2) - (p_2+q_2)(r_1+s_1) + r_1s_2 - r_2s_1)} \\
&\quad \times \phi(p)\phi(q)\phi(r)\phi(s).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

例として，プロパゲータの 1 ループ輻射補正を計算してみる．フリーのプロパゲータは通常の場の理論と同じで，

$$\langle \phi(p)\phi(q) \rangle = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q) \frac{1}{p^2+m^2} \tag{5.50}$$

である．Moyal 積が非可換であるため，行列場の理論と同様に 2 重線でダイアグラムを書くのが妥当である．プロパゲータの 1 ループ補正には図 5.1 のプラナーダイアグラムと図 5.2 の非プラナーダイアグラムがある．

プラナーダイアグラムは

$$2\lambda \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2+m^2}, \tag{5.51}$$

非プラナーダイアグラムは

$$\lambda \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\theta(p_1q_2 - p_2q_1)}}{q^2+m^2} \tag{5.52}$$

である．p_i は外線の運動量である．非プラナーダイアグラムには位相因子

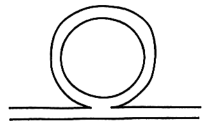


図 5.1　プロパゲータの 1 ループ補正：プラナーダイアグラム．

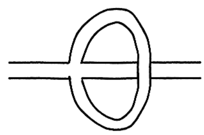


図 5.2　プロパゲータの 1 ループ補正：非プラナーダイアグラム．

$e^{i\theta(p_1q_2-p_2q_1)}$ が入っている．一方，(5.51) ではこのような位相因子はなく，通常の ϕ^4 乗理論の場合に一致している．一般に，非可換空間上の場の量子論においては，プラナーダイアグラムは対応する可換空間上の場の量子論のそれと一致することが示せる [31], [56]．例えば，(5.42) で g^2k を固定して，$k\to\infty$ の極限をとると，プラナーの寄与だけ取り出せて，通常のヤン・ミルズ理論のトフーフト極限に帰着する．

さて，(5.52) を計算してみよう．プロパゲータの Schwinger 表示

$$\frac{1}{q^2+m^2}=\int_0^\infty dse^{-(q^2+m^2)s} \tag{5.53}$$

を用いると，(5.52) は

$$\lambda\int_0^\infty ds\frac{d^2q}{(2\pi)^2}e^{-(q^2+m^2)s+i\theta(p_1q_2-p_2q_1)}=\lambda\int_0^\infty ds\frac{1}{2s}e^{-m^2s-\frac{\theta^2p^2}{4s}} \tag{5.54}$$

となる．可換空間上の場の理論の場合 ($\theta=0$)，これは対数発散する．これを正則化するために，紫外カットオフ Λ を導入し，(5.54) に固有時間カットオフとして $e^{-1/(4\Lambda^2s)}$ を入れる．すると，(5.54) は

$$\lambda\int_0^\infty ds\frac{1}{2s}e^{-m^2s-\frac{\theta^2p^2}{4s}-\frac{1}{4\Lambda^2s}}=\lambda K_0\left(m\sqrt{\theta^2p^2+\frac{1}{\Lambda^2}}\right) \tag{5.55}$$

と計算される．ここで，K_0 は第 2 種ベッセル関数で

$$K_\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^\infty dtt^{-\nu-1}e^{-t-\frac{x^2}{4t}} \tag{5.56}$$

で定義される．(5.55) の発散部分を評価してみよう．K_0 は

$$K_0(x)=\sum_{a=0}^\infty\frac{1}{a!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2a}\left(-\gamma+\sum_{b=1}^a\frac{1}{b}-\log\frac{x}{2}\right) \tag{5.57}$$

という級数展開をもつ．ここで，γ はオイラーの数である．これを使うと，(5.55) は

$$-\lambda\left(\gamma+\log\left(\frac{m}{2}\sqrt{\theta^2p^2+\frac{1}{\Lambda^2}}\right)\right)\left(1+\mathcal{O}\left(m\sqrt{\theta^2p^2+\frac{1}{\Lambda^2}}\right)\right) \tag{5.58}$$

と評価できる．$\theta=0$ のとき，これはよく知られた紫外の対数発散 $\log(\Lambda/m)$ を再現する．一方，$\theta\neq0$ のときは，$\Lambda\to\infty$ の極限は $p\neq0$ である限り，有限で紫外発散はない．これは，(5.52) に見られるように，ループ運動量が大きいときに位相因子による抑制が起こるからである．このとき，外線の運動量が小さくなる赤外領域 $p\to0$ では，これは発散する．可換空間上の場の量子論における紫外発散由来の赤外発散が起こっていて，この現象は UV/IR mixing と呼ばれている．このように，非可換空間上の場の理論では量子化と $\theta\to0$ の極限が可換ではない．弦理論においては，モジュラー変換，T 双対など赤外と紫外が結びつく現象が多々みられる．行列模型から得られる非可換空間上の場の理論が UV/IR mixing の性質を示すことは，行列模型と弦理論の繋がりを示唆する．

5.2 非可換球面

この節では，コンパクトな非可換空間の典型例である非可換球面[57] を考える．(5.23) からわかるように，量子力学において位相空間が量子化されるのに対応して，非可換空間においては空間は有限体積の量子からなる．5.1 節で見た非可換 R^d は非コンパクトであり，その空間上の場の理論を表す行列模型の行列は無限次元である必要があったが，球面はコンパクトであるため，非可換球面上の場の理論を表す行列模型における行列は有限サイズになる．非可換球面は曲った非可換空間の例としても貴重である．

非可換球面の座標は $SU(2)$ のリー代数を満たす．

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j]=i\rho\epsilon_{ijk}\hat{x}_k. \tag{5.59}$$

非可換 R^d の場合とは異なり，有限次元のヒルベルト空間上で $\hat{x}_i$ は表現できる．すなわち，$SU(2)$ のスピン j 表現（j は非負の整数または半整数）の生成子 $\hat{L}_i^{[j]}$ を用いて，

$$\hat{x}_i=\rho\hat{L}_i^{[j]} \tag{5.60}$$

と書ける．$\hat{L}_i^{[j]}$ は $(2j+1)\times(2j+1)$ 行列である．このとき，

$$\hat{x}_1^2+\hat{x}_2^2+\hat{x}_3^2=\rho^2j(j+1)\mathbb{1}_{2j+1} \tag{5.61}$$

であり，これが非可換球面と呼ばれる理由である．これから非可換球面の半径は

$$r = \rho\sqrt{j(j+1)} \tag{5.62}$$

であることがわかる．可換極限は

$$\rho \to 0, \quad j \to \infty, \quad r = \rho\sqrt{j(j+1)} : \text{固定} \tag{5.63}$$

で与えられる．非可換球面はファジー**球面**とも呼ばれる．

$2j+1$ 次元のヒルベルト空間の基底として標準的なものをとる．

$$|jr\rangle \quad (r = -j, -j+1, \cdots, j). \tag{5.64}$$

$SU(2)$ の生成子のこの基底への作用は

$$\hat{L}_{\pm}^{[j]}|jr\rangle = \sqrt{(j \mp r)(j \pm r + 1)}|jr \pm 1\rangle,$$
$$\hat{L}_3^{[j]}|jr\rangle = r|jr\rangle \tag{5.65}$$

である．ここで，$\hat{L}_{\pm}^{[j]} = \hat{L}_1^{[j]} \pm i\hat{L}_2^{[j]}$ である．

このヒルベルト空間上の任意の演算子 $\hat{f}$ は

$$\hat{f} = \sum_{r,r'} f_{r,r'}|jr\rangle\langle jr'| \tag{5.66}$$

のように展開できる．より便利な基底として非可換球面調和関数を次式で定義する [36], [47], [58]~[62]．

$$\hat{Y}_{Jm}^{[j]} = \sqrt{2j+1}\sum_{r,r'}(-1)^{-j+r'}C_{jr\,j-r}^{Jm}|jr\rangle\langle jr'|. \tag{5.67}$$

ここで，$C_{jr\,j-r}^{Jm}$ は Clebsh-Gordan 係数である．J は $0, 1, \cdots, 2j$ の値をとり，m は $-J, -J+1, \cdots, J$ の値をとる．$2j$ が紫外のカットオフであることが後でわかる．これは 2 つのスピン j を合成を行っていることに相当し，それを反映して

$$[\hat{L}_{\pm}^{[j]}, \hat{Y}_{Jm}^{[j]}] = \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)}\hat{Y}_{Jm\pm1}^{[j]},$$
$$[\hat{L}_3^{[j]}, \hat{Y}_{Jm}^{[j]}] = m\hat{Y}_{Jm}^{[j]} \tag{5.68}$$

が成り立つ．エルミート共役は

$$(\hat{Y}_{Jm}^{[j]})^{\dagger} = (-1)^m\hat{Y}_{J-m}^{[j]} \tag{5.69}$$

で与えられる．正規直交関係

$$\frac{1}{2j+1}\mathrm{tr}((\hat{Y}_{Jm}^{[j]})^{\dagger}\hat{Y}_{J'm'}^{[j]}) = \delta_{JJ'}\delta_{mm'} \tag{5.70}$$

が成り立つように規格化されている．さらに，2 つの非可換球面調和関数の積は

$$\hat{Y}^{[j]}_{J_2m_2}\hat{Y}^{[j]}_{J_3m_3} = \sum_{J_1,m_1} \hat{C}^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3}\hat{Y}^{[j]}_{J_1m_1} \tag{5.71}$$

で与えられる．ここで，

$$\begin{aligned}\hat{C}^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3} &\equiv \frac{1}{2j+1}\mathrm{tr}\left\{\left(\hat{Y}_{J_1m_1}\right)^\dagger \hat{Y}_{J_2m_2}\hat{Y}_{J_3m_3}\right\} \\ &= (-1)^{J_1+2j}\sqrt{(2j+1)(2J_2+1)(2J_3+1)} \\ &\quad \times C^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3}\left\{\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ j & j & j\end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{5.72}$$

である．$\{\ \}$ は $6j$ シンボルである．

一方，通常の球面調和関数 $Y_{Jm}(\Omega)$ は角運動量演算子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pm &= e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ \mathcal{L}_3 &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned} \tag{5.73}$$

の作用のもと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pm Y_{Jm}(\Omega) &= \sqrt{(J\mp m)(J\pm m+1)}Y_{Jm\pm1}(\Omega), \\ \mathcal{L}_3 Y_{Jm}(\Omega) &= mY_{Jm}(\Omega)\end{aligned} \tag{5.74}$$

のように振舞う．エルミート共役と正規直交関係は

$$(Y_{Jm}(\Omega))^\dagger = (-1)^m Y_{J-m}(\Omega), \tag{5.75}$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi}(Y_{Jm}(\Omega))^\dagger Y_{J'm'}(\Omega) = \delta_{JJ'}\delta_{mm'} \tag{5.76}$$

で与えられる．(5.74)，(5.75)，(5.76) はそれぞれ (5.68)，(5.69)，(5.70) に対応している．さらに，2 つの球面調和関数の積は

$$Y_{J_2m_2}(\Omega)Y_{J_3m_3}(\Omega) = \sum_{J_1,m_1} C^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3}Y_{J_1m_1}(\Omega) \tag{5.77}$$

である．ここで，

$$C^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3} = \int\frac{d\Omega}{4\pi}Y^*_{J_1m_1}(\Omega)Y_{J_2m_2}(\Omega)Y_{J_3m_3}(\Omega) \tag{5.78}$$

である．$j\to\infty$ の可換極限で，$J_1, J_2, J_3 \ll j$ のとき

$$\hat{C}^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3} \to C^{J_1m_1}_{J_2m_2\ J_3m_3} \tag{5.79}$$

を示せる．これは，$R \gg 1$ に対して成り立つ公式[63]

$$\left\{\begin{matrix} a & b & c \\ d+R & e+R & f+R\end{matrix}\right\} \approx \frac{(-1)^{-a+b+2c-d+e+2f+2R)}}{\sqrt{2R(2c+1)}}C^{c\ d-e}_{a\ f-e\ b\ d-f} \tag{5.80}$$

を使えば証明できる．こうして，(5.77) が (5.71) に対応することがわかる．以上から，非可換球面調和関数は球面調和関数に可換極限で対応することがわかった．対応をまとめると，以下のようになる．

$$\hat{Y}_{Jm}^{[j]} \leftrightarrow Y_{Jm}(\Omega), \tag{5.81}$$

$$[L_i^{[j]},\ ] \leftrightarrow \mathcal{L}_i, \tag{5.82}$$

$$\frac{1}{2j+1}\mathrm{tr} \leftrightarrow \int \frac{d\Omega}{4\pi}. \tag{5.83}$$

さて，任意の演算子 $\hat{f}$ は非可換球面調和関数によって

$$\hat{f} = \sum_{J=0}^{2j}\sum_{m=-J}^{J} f_{Jm}\hat{Y}_{Jm}^{[j]} \tag{5.84}$$

のように展開される．これから，S^2 上の関数が定義される．

$$f(\Omega) = \sum_{J=0}^{2j}\sum_{m=-J}^{J} f_{Jm}Y_{Jm}(\Omega). \tag{5.85}$$

ここで，$\Omega=(\theta,\phi)$ は球面上の座標である．(5.84) は (5.5)，(5.85) は (5.6) に対応している．これで，ヒルベルト空間上の演算子と非可換空間上の関数の対応がつく．J についての和の上限 $2j$ が紫外カットオフに相当する．この正則化は回転対称性を保つものであることに注意したい．

さて，5.1 節のときと同じように，$(2j+1)\times(2j+1)$ エルミート行列 $\hat{\phi}$ についての「外場」$\hat{L}_i^{[j]}$ を含んだ行列模型を考える．

$$S = \frac{1}{2j+1}\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{2}[L_i^{[j]},\hat{\phi}]^2 + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^4\right). \tag{5.86}$$

対応する可換球面上の通常の場の理論は

$$S_{S^2} = \int \frac{d\Omega}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_i\phi)^2 + \frac{m^2}{2} + \frac{\lambda}{4}\phi^4\right) \tag{5.87}$$

である．$\hat{\phi}$ を $\hat{Y}_{Jm}^{[j]}$ で展開すると，(5.86) は

$$\begin{aligned}
S &= S_{free} + S_{int},\\
S_{free} &= \sum_{J,m}\frac{(-1)^m}{2}(J(J+1)+m^2)\phi_{Jm}\phi_{J-m},\\
S_{int} &= \sum_{J_1,m_1\sim J_5,m_5}\frac{\lambda(-1)^{m_5}}{4}\hat{C}^{J_5m_5}_{J_1m_1\ J_2m_2}\hat{C}^{J_5-m_5}_{J_3m_3\ J_4m_4}\\
&\qquad\times\phi_{J_1m_1}\phi_{J_2m_2}\phi_{J_3m_3}\phi_{J_4m_4}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

と書ける．一方，ϕ を $Y_{Jm}(\Omega)$ で展開すると，(5.87) は

$$
\begin{aligned}
S_{S^2} &= S_{S^2,free} + S_{S^2,int}, \\
S_{S^2,free} &= \sum_{J,m} \frac{(-1)^m}{2}(J(J+1)+m^2)\phi_{Jm}\phi_{J-m}, \\
S_{S^2,int} &= \sum_{J_1,m_1\sim J_5,m_5} \frac{\lambda(-1)^{m_5}}{4} C^{J_5 m_5}_{J_1 m_1\ J_2 m_2} C^{J_5 -m_5}_{J_3 m_3\ J_4 m_4} \\
&\qquad \times \phi_{J_1 m_1}\phi_{J_2 m_2}\phi_{J_3 m_3}\phi_{J_4 m_4}
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

となる．(5.79) より，素朴には両者の理論は $j \to \infty$ の極限で一致する．実際，(5.79) において，$J_1, J_2, J_3 \ll j$ の条件に注意すると，これはトリーレベルでは正しいが，量子補正を入れると 5.1 節で見た UV/IR mixing と同じように両者に違いが出ることがわかる．これを以下で見てみる．

5.1 節のときと同じように，(5.88) を用いて，プロパゲータの 1 ループ輻射補正を計算する．外線の角運動量を (J, m) とする．図 5.1 は

$$
(-1)^m \sum_{J_1=0}^{2j} \frac{2J_1+1}{J_1(J_1+1)+m^2} \tag{5.90}
$$

と計算される．図 5.2 は

$$
\frac{(-1)^m\lambda}{2} \sum_{J_1=0}^{2j} \frac{2J_1+1}{J_1(J_1+1)+m^2}(-1)^{J_1-J+2j} \begin{Bmatrix} J & j & j \\ J_1 & j & j \end{Bmatrix} \tag{5.91}
$$

と計算される．一方，(5.89) を用いて，図 5.1 を計算すると (5.90) に一致し，図 5.2 を計算すると (5.90) の 1/2 になる．(ただし，カットオフ $2j$ は無限大にしたものになる.) 非可換平面のときと同じように，非プラナーについては，非可換球面上の場の理論は可換球面上の対応する理論からずれる．また，$N^2 = (2j+1)^2 = \sum_{J=0}^{2j}(2j+1)$ であり，3.4 節で議論したように，この対応においては行列の自由度がすべて場の自由度に使われている．

最後に非可換球面上のゲージ理論について見てみよう．非可換 R^d のときのように，(5.36) から出発して，

$$
\hat{A}_i = \mu \hat{L}_i^{[j]} + \hat{a}_i \tag{5.92}
$$

と展開すればよいように思える．しかし，$\hat{A}_i = \mu \hat{L}_i^{[j]}$ が (5.36) から導かれる運動方程式

$$
[A_j, [A_j, A_i]] = 0 \tag{5.93}
$$

の解になっていないので，このままでは自然でない．出発点として，

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4(2j+1)g^2}\mathrm{tr}([\hat{A}_i, \hat{A}_j] - i\mu\epsilon_{ijk}\hat{A}_k)^2 \\
&= -\frac{1}{4(2j+1)g^2}\mathrm{tr}([\hat{A}_i, \hat{A}_j]^2 - 4i\mu\epsilon_{ijk}\hat{A}_i\hat{A}_j\hat{A}_k - 2\mu^2\hat{A}_i^2)
\end{aligned} \tag{5.94}
$$

をとればよい．2項目は B 場があるときのDブレーン有効作用に現われるMyers項と解釈される．3項目はなくてもよい[64]．$\hat{A}_i = \frac{3\mu}{4}\hat{L}_i^{[j]}$ が解になる．(5.94)に対応する可換球面上のゲージ理論は

$$S = -\frac{1}{4g^2}\int \frac{d\Omega}{4\pi}(\mu\mathcal{L}_i a_j - \mu\mathcal{L}_i a_j + [a_i, a_j] - i\mu\epsilon_{ijk}a_k)^2 \tag{5.95}$$

である．

5.3 $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の非摂動的定式化 2

この節では，前節で説明した非可換球面と第3章で見たラージ N 還元の応用として，3.5節で述べたものとは異なる $R\times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の非摂動的定式化を構築する[36]．

3.5節の場合と同様に，$R\times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論を R へ次元還元してplane wave行列模型(3.124)を得る．この行列模型の3.5節の場合と異なる古典解を考える．

$$L_a = \begin{pmatrix} L_a^{[\frac{n}{2}-\frac{\nu}{4}-\frac{1}{4}]} & & & & \\ & L_a^{[\frac{n}{2}-\frac{\nu}{4}+\frac{1}{4}]} & & & \\ & & L_a^{[\frac{n}{2}-\frac{\nu}{4}+\frac{3}{4}]} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_a^{[\frac{n}{2}+\frac{\nu}{4}-\frac{3}{4}]} \end{pmatrix} \otimes 1_k. \tag{5.96}$$

ここで，n と ν は正の整数である．これを書き換えると，

$$L_a = \bigoplus_{I=1}^{\nu} L_a^{[j_I]} \otimes 1_k,$$
$$2j_I + 1 = n + I - \frac{\nu+1}{2} \tag{5.97}$$

であり，$\nu\times k$ 個の $SU(2)$ の既約表現の直和になっている．N は n と ν と k によって

$$N = n\nu k \tag{5.98}$$

と表される．(3.124)をこの背景のまわりで展開し，次の極限をとる．

$$k\to\infty,\ \ \frac{n}{\nu}\to\infty,\ \ \nu\to\infty,\ \ \text{ここで}\ \tilde{\lambda}\equiv\frac{g_{\mathrm{PW}}^2 k}{n} = \text{固定}\,. \tag{5.99}$$

すると，$R\times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論のプラナー極限が再現される．トフーフト結合定数は

$$\lambda = \tilde{\lambda}\, V_{S^3}\,, \tag{5.100}$$

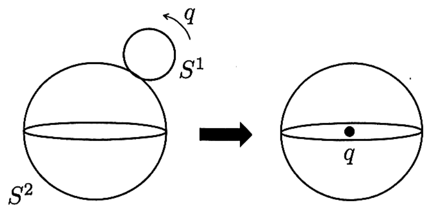


図 5.3　KK 運動量とモノポール磁荷.

で与えられる．ここで，$V_{S^3} = 2\pi^2(R_{S^3})^3 = 16\pi^2$ は S^3 の体積である．これは，$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論のもう 1 つのラージ N 還元である．背景 (5.96) は $SU(2|4)$ 対称性を保つので，このタイプのラージ N 還元は $SU(2|4)$ 対称性とゲージ対称性を保つ正則化を与える．この背景の安定性は 3.5 節の議論と同じ議論で言える．$PSU(2|4)$ 対称性は微調整なしに自然に回復する．

ここでは，S^3 を S^2 上の S^1 **束**と見ている．S^3 は局所的には $S^2 \times S^1$ であるが，大域的にはそうではなく非自明な**ファイバー束**の構造を持っている．ν は S^1 方向の **Kaluza-Klein(KK) 運動量**の紫外カットオフに相当し，n は S^2 上の KK 運動量の紫外カットオフに相当する．S^2 から S^1 を構成して，S^3 を得るときは通常のラージ N 還元に相当し，S^2 はファジー球面の連続極限から得るため，ツイスト還元模型とも見られる．このように，このラージ N 還元はいわばハイブリッド型と言える．(5.96) と (5.97) において，1_k を導入して，$k \to \infty$ 極限をとることにより，プラナーの寄与だけを取り出すことができ，S^2 から S^3 を得るラージ N 還元を成立させるとともに (3.4 節を参照)，ファジー球面の連続極限において，前節で見た可換球面からのずれを避けることができる．さらに，3.5 節の場合と同じように，インスタントン効果による他の真空解への遷移を抑える役割もする．

このファイバー束の構造群は $U(1)$ であるが，$U(1)$ 変換が S^1 上の並進に相当するので，$U(1)$ 電荷 q は S^1 上の KK 運動量 q に等しい．ファイバー束が非自明であることを反映して，構造群 $U(1)$ の電荷 q を持つ（すなわち KK 運動量 q の）KK モードは，S^2 上では S^2 の中心に磁荷 q の**ディラックモノポール**が存在する場合の $U(1)$ ゲージ場の中を運動する粒子のように振舞う（図 5.3）．このようなゲージ場の配位は次のように与えられる．

$$A_\theta = 0,$$
$$A_\phi = \begin{cases} \mu^{-1}(-1+\cos\theta)q & 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}+\epsilon \\ \mu^{-1}(1+\cos\theta)q & \frac{\pi}{2}-\epsilon < \theta \le \pi \end{cases} . \tag{5.101}$$

ここで，S^2 は北極を含むパッチ $(0 \le \theta < \frac{\pi}{2}+\epsilon)$ と南極を含むパッチ

$(\frac{\pi}{2} - \epsilon < \theta \leq \pi)$ の 2 つのパッチに覆われており，ゲージ場はパッチを移る際に $U(1)$ ゲージ変換を受けている．KK 運動量 q が整数または半整数をとるが，これは磁荷についてのディラックの量子化条件に対応している．モノポールによる磁場が角運動量 q を持っているので，S^2 上の全角運動量 j は

$$j = |q|, |q| + 1, |q| + 2, \cdots \tag{5.102}$$

となる．

背景場 (5.96) のまわりのゆらぎを考える．ゆらぎの (I, J) ブロックは $((2j_I + 1) \times (2j_J + 1)) \times 1_k$ 行列である．これを $M^{(I,J)}$ と書こう．背景場 (5.96) とゆらぎの交換子からこのブロックへの $SU(2)$ の作用は与えられる．これを $L_a \circ M^{(I,J)}$ と書くと，

$$L_a \circ M^{(I,J)} = L_a^{[j_I]} M^{(I,J)} - M^{(I,J)} L_a^{[j_J]} \tag{5.103}$$

である．これは，スピン j_I 表現とスピン j_J 表現のテンソル積表現にしたがっていると見られる．これを既約分解すれば，よく知られているように，

$$j = |j_I - j_J|, |j_I - j_J| + 1, |j_I - j_J| + 2, \cdots, j_I + j_J \tag{5.104}$$

となる．(5.97) より，

$$j_I - j_J = \frac{I - J}{2},$$
$$j_I + j_J = n + \frac{I + J}{2} - \frac{\nu + 3}{2} \tag{5.105}$$

であるから，(5.104) における j の上限は $n \to \infty$ の極限でなくなり，

$$q = \frac{I - J}{2} \tag{5.106}$$

と対応させることにより，(5.104) は (5.102) に帰着することがわかる．このように，(I, J) 成分は KK 運動量が $j_I - j_J = (I - J)/2$ の KK モードになっているわけだが *3)，これは 3.1 節で (i, j) 成分の運ぶ運動量が $p_i - p_j$ であったことに対応している．以上から，フリー部分は $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ理論を再現することがわかるが，相互作用を入れてもこの理論のプラナー極限を再現することを示すことができる．実際，前節と同じように，モノポール背景中のモノポール球面調和関数 $\tilde{Y}_{Jmq}$ と (5.67) を一般化した

$$\hat{Y}_{Jm(jj')} = \sqrt{N_0} \sum_{r,r'} (-1)^{-j+r'} C^{Jm}_{jr\, j'-r'} |jr\rangle\langle j'r'| \tag{5.107}$$

で定義される $(2j + 1) \times (2j' + 1)$ 行列の基底が $q = j - j'$ のもと対応することが示せるのである [36], [47], [59]~[62]．ここで，N_0 は $\sim j, j' \to \infty$ のある整数である．

*3) このような行列の非対角ブロックとトフーフト・ポリヤコフモノポールとの対応についての別の観点からの考察について [65] を参照されたい．

5.4 ツイスト還元模型

この節では，5.1 節の非可換平面上のゲージ理論の格子版と言えるツイスト還元模型 (twisted reduced model) [31] について解説する *4)．これは，非可換トーラスの離散版上のゲージ理論を与えるとも言える．また，ツイスト還元模型は 3.3 節で見たラージ N 還元を実際に成立させるというラージ N ゲージ理論の非摂動的定式化の観点からも重要である．ここでは，この観点からツイスト還元模型を見てみる．

(3.35) を少し変形した次のツイスト還元模型を考える．

$$Z_t = \prod_\mu \int dU_\mu \exp\left\{\beta \sum_{\mu\neq\nu=1}^{d} \mathrm{tr}\left(Z_{\mu\nu}U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger\right)\right\}. \tag{5.108}$$

ここで，$Z_{\mu\nu}$ は位相因子で

$$Z_{\mu\nu} = \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n_{\mu\nu}\right) \tag{5.109}$$

である．$n_{\mu\nu}$ は d 次元の反対称テンソルである．また，ここでは U_μ は $U(N)$ ではなく $SU(N)$ 行列とする．(5.108) における $Z_{\mu\nu}$ による変形は (5.36) における θ_{ij}^{-1} による変形に相当する．(5.108) の真空は，

$$U_\mu^{(0)} = \Gamma_\mu \tag{5.110}$$

である．ここで，Γ_{mu} は

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu = Z_{\nu\mu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu \tag{5.111}$$

を満たす．この解は 5.1 節の $\hat{A}_\mu = \hat{p}_\mu$ に対応する．格子間隔を a としたとき，$U_\mu = e^{iaA_{mu}}$ の関係から，$n_{\mu\nu}$ と 5.1 節の $\theta_{\mu\nu}$ の間に（形式的に）

$$a^2\theta_{\mu\nu}^{-1} \sim n_{\mu\nu}/N \tag{5.112}$$

の関係がある．

$d=4$ の場合，Γ_μ を具体的に与える．L を正の整数とし，

$$\begin{aligned} &n_{\mu\nu} = kL \quad (\mu > \nu), \\ &N = L^2 \end{aligned} \tag{5.113}$$

とおく．ここで，k と L は互いに素の正の整数である．(4.29) で $q \to L$ としたものを U_L，同様に (4.30) で $q \to L$ としたものを V_L とする．このもとで，

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 = V_L \otimes \mathbb{1}_L, \quad \Gamma_2 = U_L^k \otimes V_L, \\ &\Gamma_3 = U_L^k \otimes V_L U_L^k, \quad \Gamma_4 = U_L^k \otimes U_L^k \end{aligned} \tag{5.114}$$

*4) ツイストという術語は twisted boundary condition に由来する．

とすれば，(5.111) を満たすことがわかる．ここで，$\mathbb{1}_L$ は $L\times L$ の単位行列である．

(3.36) に対応するウィルソンループの期待値は

$$W_t(C)=\langle\left(\prod_{\mu\nu}Z_{\mu\nu}^{N_{\mu\nu}}\right)\mathrm{tr}\,(U_\mu U_\nu U_\alpha\cdots U_\sigma)\rangle. \tag{5.115}$$

ここで，$N_{\mu\nu}$ は C を張る最小面積の面に含まれる $\mu\nu$ 平面内のプラケットの数である．(5.115) に対する Schwinger-Dyson 方程式は，3.3 節の場合と同様に元の理論の Schwinger-Dyson 方程式と開いたウィルソンラインの寄与だけ異なる．$U(1)^d$ 対称性の代わりに，Z_N^d 対称性

$$U_\mu\to Z_\mu U_\mu\quad(Z_\mu\in Z_N) \tag{5.116}$$

をこのツイスト還元模型は持つ．強結合領域ではこの対称性は自発的に破れずに，開いたウィルソンラインの期待値は消えて，Schwinger-Dyson 方程式はプラナー極限で元の理論のそれに一致する．弱結合では，(5.110) が支配的になって，0 と q_μ を結ぶラインに対して，

$$\mathrm{tr}V(q)=Z\mathrm{tr}\prod_\mu\Gamma_\mu^{q_\mu} \tag{5.117}$$

が消えれば，Schwinger-Dyson 方程式は元の理論のそれに一致する．ここで，Z は経路に依存して決まる位相因子である．ここで，ある μ に対して，

$$V(q)=\alpha\Gamma_\mu^{-1}V(q)\Gamma_\mu \tag{5.118}$$

だとする．ここで，$\alpha\neq1$ とする．両辺のトレースをとることにより，$\mathrm{tr}V(q)=0$ であることがわかる．すなわち，$\mathrm{tr}V(q)\neq0$ であるためには，すべての μ に対して，

$$[\Gamma_\mu,V(q)]=0 \tag{5.119}$$

である必要がある．このとき，すべての μ について，q_μ が L の整数倍になる．格子の 1 辺が L の格子点から成り，空間全体が L^4 の格子点から成る $T^4=(S^1)^4$ だとし，場に周期境界条件を課しているとすると，C が T^4 に巻きついたループに対応する．このようなループに対するウィルソンループの期待値は元のゲージ理論で消えない．よって，1 辺の長さが L のトーラス上のヤン・ミルズ理論の Schwinger-Dyson 方程式が成立する．5.1 節と同じく，やはり $N^2=L^4=V$ の関係が成り立つことに注意しよう．摂動論的には，プラナーダイアグラムについては前節と同様に元の理論と一致する．非プラナーダイアグラムについてはヴァーテックスにある位相は，5.1 節の議論と (5.112) から，典型的に $\theta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu\sim\theta_L P_\mu P_\nu$ のようになる．ここで，P^μ と P^ν は格子の運動量で，q^μ, q^ν を L 以下の正の整数として，$P^\mu=2\pi q^\mu/L$, $P^\nu=2\pi q^\nu/L$ である．また，

$\theta_L = \bar{k}L/(2\pi)$ で，$\bar{k}$ は L と互いに素であり，$k\bar{k} = 1 \mod L$ より定義される．よって，$L \to \infty$ で位相が大きく振動し，非プラナーダイアグラムは消える．こうして，元の理論のプラナー極限が再現される．こうして，ツイスト還元模型は元のゲージ理論のプラナー極限を再現する．しかし，実際は事情はそれほど単純でない．(5.110) 以外の Z_N 対称性を破る配位（例えば $\sim 1_N$）がエントロピーの効果から寄与して，Z_N 対称性が弱結合でも破れることが報告されている [66],[67]．これを防ぐには，k を調整して，k/L を有限に保って，$\bar{k}$ も大きく保ちつつ，$L \to \infty$ すればよいことが報告されている [32],[33]．非可換性が残るような極限の取り方（より一般の $n_{\mu\nu}$ についても）の提案については [68] とその中の参考文献を参照されたい．

第 6 章
超弦理論と行列模型

この章では，超弦理論の非摂動的定式化の候補として提唱されたIIB 行列模型[6]について解説する．6.1 節で模型を導入する．6.2 節から 6.5 節で，この模型が超弦理論の非摂動的定式化になっていることの証拠として，IIB 型超重力理論と IIB 型超弦理論との対応を見る．6.6 節では曲った時空の記述に対する試みについて述べる．6.7 節では，この模型のユークリッド版のダイナミクスの研究を紹介する．6.8 節で最近の研究成果を紹介する．

6.1 IIB 行列模型

IIB 行列模型 *1) の作用は以下で与えられる．

$$S = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\right). \tag{6.1}$$

ここで，A_μ $(\mu = 0, 1, \cdots, 9)$ は 10 個の $N \times N$ のエルミート行列であり，μ は 10 次元のベクトルの足である．Γ^μ は 10 次元のガンマ行列で，ψ は 10 次元のマヨラナワイルスピノールの足を持ち，16 個の $N \times N$ のエルミート行列である．ψ はグラスマン奇である．A_μ がベクトル，ψ が 10 次元のマヨラナワイルスピノールとして変換すれば，この模型は 10 次元のローレンツ対称性を持つ．Tr は $N \times N$ 行列についてのトレースである．この模型は 10 次元の $U(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を 0 次元に次元還元した形をしており，時空はアプリオリには存在していない．後で議論するように，時空はダイナミカルに生成する．

ローレンツ対称性に加えて，この模型は次の変換のもとでの不変性を持つ．

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}A_\mu &= i\bar{\epsilon}_1\Gamma_\mu\psi, \\ \delta^{(1)}\psi &= \frac{i}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\epsilon_1, \end{aligned} \tag{6.2}$$

*1) 提唱者（石橋，川合，北澤，土屋）の頭文字をとって IKKT 模型とも呼ばれる．

$$\delta^{(2)}A_\mu = 0,$$
$$\delta^{(2)}\psi = \epsilon_1 1_N, \tag{6.3}$$

$$\delta_T A_\mu = c_\mu 1_N,$$
$$\delta_T \psi = 0, \tag{6.4}$$

$$\delta_G A_\mu = i[\lambda, A_\mu],$$
$$\delta_G \psi = i[\lambda, \psi]. \tag{6.5}$$

ここで，ϵ_1 と ϵ_2 は 10 次元のマヨラナワイルスピノールで，グラスマン奇の変換パラメータであり，c_μ はベクトルの変換パラメータである．1_N は $N \times N$ の単位行列である．λ は $N \times N$ のエルミート行列である．(6.2) は 10 次元の $U(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論が持つ 10 次元の $\mathcal{N}=1$ の超対称性を 0 次元に次元還元したものであり，(6.5) は 10 次元の $U(N)$ ゲージ対称性を 0 次元に次元還元したものである．

(6.2)，(6.3)，(6.4) の生成子をそれぞれ $Q^{(1)}$，$Q^{(2)}$，P_μ と書き，

$$\tilde{Q}^{(1)} = Q^{(1)} + Q^{(2)},$$
$$\tilde{Q}^{(2)} = i(Q^{(1)} - Q^{(2)}) \tag{6.6}$$

と定義すると，ゲージ対称性 (6.5) と解釈される項とフェルミオンの運動方程式

$$\Gamma^\mu[A_\mu, \Psi] = 0 \tag{6.7}$$

に比例する項を除くと，次の関係が成り立つことがわかる．

$$[\bar{\epsilon}_1 \tilde{Q}^{(i)}, \bar{\epsilon}_2 \tilde{Q}^{(j)}] = -2\delta^{ij} \bar{\epsilon}_1 \Gamma^\mu \epsilon_2 P_\mu. \tag{6.8}$$

これは，P_μ を運動量に同定すると，10 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性の代数にほかならない．(運動方程式を使っているので，オンシェルの超対称性である.) このとき，(6.4) は並進対称性を表し，A_μ の固有値は座標と解釈される．これは，第 2 章の終わりで述べた (6.1) を考える動機と合致している．$\mathcal{N}=2$ 超対称性は 10 次元の最大の超対称性であり，理論がユニタリーで質量なし場を含めば，必ず重力子を含むことになる．したがって，この対称性をもつということはこの模型が重力を含むことを強く示唆する．

次節ではこの模型と IIB 型超弦理論との対応について詳しく見る．

6.2 世界面上の Green-Schwarz 作用との対応

ここでは，IIB 行列模型と世界面上の **Green-Scwarz** 作用との対応を見る．

IIB 型超弦理論に対する共変的な南部・後藤型の Green-Schwarz 作用から出発する.

$$S_{NG} = -T\int d^2\sigma \left(\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} + i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2)\right.$$
$$\left. + \epsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\right). \tag{6.9}$$

ここで, T は弦の張力で, σ^a $(a=1,2)$ は世界面の座標である. θ_1 と θ_2 は 10 次元のマヨラナワイルスピノールであり, IIB 型なので 10 次元で同じカイラリティを持つ. $\Sigma^{\mu\nu}$ は

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu, \tag{6.10}$$
$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1 + i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2 \tag{6.11}$$

のように定義されている. (6.9) で θ_1 と θ_2 を落とし, $\mu = 0, \cdots, 25$ とすれば, ボゾニック弦に対する**南部・後藤弦**の作用に帰着する. 今, 通常の Green-Scwarz 作用に対しての経路積分において, $\theta_2 \to i\theta_2$ の解析接続がなされており, (6.9) では θ_2 を含む項の符号が通常の Green-Schwarz 作用の場合と逆になっていることに注意したい.

付録 C で示されているように, (6.9) は 10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性

$$\begin{aligned}
\delta_{SUSY}\theta^1 &= \epsilon^1, \\
\delta_{SUSY}\theta^2 &= \epsilon^2, \\
\delta_{SUSY}X^\mu &= i\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\theta^1 - i\bar{\epsilon}^2\Gamma^\mu\theta^2
\end{aligned} \tag{6.12}$$

と κ 対称性

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa\theta^1 &= \alpha^1, \\
\delta_\kappa\theta^1 &= \alpha^2, \\
\delta_\kappa X^\mu &= i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\alpha^1 - i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\alpha^2
\end{aligned} \tag{6.13}$$

を持つ. ここで,

$$\alpha^1 = (1+\tilde{\Gamma})\kappa^1, \tag{6.14}$$
$$\alpha^2 = (1-\tilde{\Gamma})\kappa^2, \tag{6.15}$$
$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\rho}\Sigma_{\lambda\rho}}}\Sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu} \tag{6.16}$$

であり, κ^1 と κ^2 は局所的な (σ^a に依存した) グラスマン奇のマヨラナワイルフェルミオンのパラメータである. 容易に確かめられるように, $\tilde{\Gamma}^2 = 1$ であり, (6.14) と (6.15) から, α^1 と α^2 はそれぞれ局所的なマヨラナワイルフェルミオンの半分の自由度を持つことがわかる. (6.13) が意味するところは, θ^1 と

θ^2 の自由度の半分を κ 対称性により消すことができるということである．ここでは，

$$\theta^1 = \theta^2 = \psi \tag{6.17}$$

ととって，この κ 対称性をゲージ固定しよう．θ_1 と θ_2 は同じカイラリティを持つので，この条件は 10 次元のローレンツ対称性を保っていることに注意されたい．

このゲージ固定により，(6.9) は次のようになる．

$$\tilde{S}_{NG} = -T \int d^2\sigma \left(\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} + 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi \right). \tag{6.18}$$

ここで，

$$\sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \tag{6.19}$$

である．

さて，κ 対称性の変換 (6.13) と組み合わせて，$\mathcal{N} = 2$ 超対称性の変換 (6.12) を変形し，ゲージ固定条件 (6.17) を保つようにすると，(6.18) はなおも $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を持つはずである．すなわち，

$$\begin{aligned} \delta\theta^1 &= \delta_{SUSY}\theta^1 + \delta_\kappa \theta^1, \\ \delta\theta^2 &= \delta_{SUSY}\theta^2 + \delta_\kappa \theta^2, \\ \delta X^\mu &= \delta_{SUSY} X^\mu + \delta_\kappa X^\mu \end{aligned} \tag{6.20}$$

とし，$\delta\theta^1 = \delta\theta^2$ となるように，

$$\begin{aligned} \kappa^1 &= \frac{-\epsilon^1 + \epsilon^2}{2}, \\ \kappa^2 &= \frac{\epsilon^1 - \epsilon^2}{2} \end{aligned} \tag{6.21}$$

ととる．ここで，ξ と ϵ を

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \\ \epsilon &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \end{aligned} \tag{6.22}$$

と定義すると，(6.20) は

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= -\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^2}}\sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon, \\ \delta^{(1)} X^\mu &= 4i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \psi \end{aligned} \tag{6.23}$$

と

$$\delta^{(2)}\psi = \xi,$$
$$\delta^{(2)}X^\mu = 0 \tag{6.24}$$

になる.

$\tilde{S}_{NG}$ を **Schild 型**[69] に書き換えるために，まず Poisson 括弧を導入する．

$$\{X,Y\} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab}\partial_a X \partial_b Y. \tag{6.25}$$

ここで，$\sqrt{g}$ は弦の世界面上の正定値のスカラー密度であり，ここでは世界面の計量 g_{ab} から得られる $\sqrt{\det(g_{ab})}$ に同定する．Schild 型の作用は次のものである．

$$S_{Schild} = \int d^2\sigma \left[\sqrt{g}\alpha\left(\frac{1}{4}\{X^\mu,X^\nu\}^2 - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu\{X_\mu,\psi\}\right) + \beta\sqrt{g}\right]. \tag{6.26}$$

この作用から得られる $\sqrt{g}$ についての運動方程式は

$$-\frac{1}{4}\alpha\frac{1}{(\sqrt{g})^2}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2 + \beta = 0 \tag{6.27}$$

であり，これから

$$\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} \tag{6.28}$$

と解ける．これを (6.26) に代入すると，

$$\int d^2\sigma \left(\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} - \frac{i}{2}\alpha\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\psi}\Gamma^\mu \partial_b \psi\right). \tag{6.29}$$

これは，自由に決められる ψ の規格化を除いて，$\tilde{S}_{NG}$ に確かに一致している *2)．(6.26) では，(6.23) の対称性は

$$\delta^{(1)}\psi = -\frac{1}{2}\{X_\mu, X_\nu\}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon,$$
$$\delta^{(1)}X^\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi \tag{6.30}$$

として，(6.24) の対称性は

$$\delta^{(2)}\psi = \xi,$$
$$\delta^{(2)}X^\mu = 0 \tag{6.31}$$

として実現される．

(6.26) を古典作用とする経路積分は少なくとも形式的には

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sqrt{g}\mathcal{D}X\mathcal{D}\psi\, e^{S_{Schild}} \tag{6.32}$$

*2) 付録 D において，南部 - 後藤作用と Schild 作用の等価性を別の視点から示した．

と定義される．(6.26) は世界面上の一般座標変換対称性を持つ．

$$\delta_d \psi = \epsilon^a \partial_a \psi, \tag{6.33}$$

$$\delta_d X^\mu = \epsilon^a \partial_a X^\mu, \tag{6.34}$$

$$\delta_d \sqrt{g} = \partial_a (\epsilon^a \sqrt{g}). \tag{6.35}$$

また，(6.32) において，経路積分の測度もこの対称性を持つと仮定する．$\sqrt{g}$ を固定することにより，この対称性を部分的にゲージ固定する．(6.35) により，一般座標変換のパラメータ ϵ^a に次の制限が付く．

$$\partial_a (\epsilon^a \sqrt{g}) = 0. \tag{6.36}$$

この制限が付いた一般座標変換は **area preserving diffeomorphism** と言われる．経路積分 (6.32) において，$\sqrt{g}$ についての汎関数積分は

$$A = \int d^2\sigma \sqrt{g} \tag{6.37}$$

としたとき，A についての積分となる．(6.36) は σ^a の任意関数 $\rho(\sigma)$ を用いて次のように解かれる．

$$\epsilon^a = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ab} \partial_b \rho. \tag{6.38}$$

(6.33) と (6.34) は

$$\begin{aligned} \delta_{apd} \psi &= \{\psi, \rho\}, \\ \delta_{apd} X^\mu &= \{X^\mu, \rho\} \end{aligned} \tag{6.39}$$

と表される．すなわち，area preserving diffeomorphism は Poisson 括弧によって与えられる．Poisson 括弧の成す代数を $\boldsymbol{w}_\infty$ **代数**という．

このゲージ固定の後，経路積分 (6.32) を正則化して，よく定義されたものにすることを考える．w_∞ 代数を $SU(n)$ 代数によって正則化する．Poisson 括弧は $n \times n$ 行列の交換子に代わり，世界面上の面積分は $n \times n$ 行列のトレースに代わる．

$$\begin{aligned} \{\ ,\ \} &\longrightarrow -i[\ ,\ ], \\ \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} &\longrightarrow \mathrm{Tr}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

世界面上の場 X^μ，ψ，ρ は $n \times n$ のエルミート行列になる．Poisson 括弧の基本的性質

$$\begin{aligned} &\int d^2\sigma \sqrt{g} \{X, Y\} = 0, \\ &\int d^2\sigma \sqrt{g} X \{Y, Z\} = \int d^2\sigma \sqrt{g} Z \{X, Y\} \end{aligned} \tag{6.41}$$

は次のトレースの性質に引き継がれる．

$$\mathrm{Tr}([X,Y])=0,$$
$$\mathrm{Tr}(X[Y,Z])=\mathrm{Tr}(Z[X,Y]). \tag{6.42}$$

具体例として，世界面がトーラスの場合に w_∞ 代数の $SU(n)$ 代数による正則化を見ておこう[58],[70]~[75]*3)．トーラスとして $S^1\times S^1$ を考え，その座標を (x,y)，S^1 の円周を L とする．このトーラス上の関数の基底は

$$T_{pq}=\exp\left(\frac{2\pi i}{L}(px+qy)\right)\quad(p,q=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{6.43}$$

で与えられる．$g_{ab}=\delta_{ab}$ とすると，Poisson 括弧は

$$\{T_{pq},T_{p'q'}\}=-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(pq'-qp')T_{p+p',q+q'} \tag{6.44}$$

となる．複素共役は

$$(T_{pq})^*=T_{-p,-q} \tag{6.45}$$

であり，基底の内積は

$$\frac{1}{2\pi}\int dxdy(T_{pq})^*T_{p'q'}=\frac{L^2}{2\pi}\delta_{p,p'}\delta_{q,q'} \tag{6.46}$$

で与えられる．

一方，4.2 節のときと同じように，クロック行列 U_n とシフト行列 V_n を導入する．(4.29) において q を n にしたものを U_n，(4.30) において q を n にしたものを V_n とすると，

$$U_nV_n=\omega_n^{-1}V_nU_n \tag{6.47}$$

を満たす．ここで，$\omega_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ である．(6.43) に対応して，$n\times n$ 行列の基底として，

$$J_{pq}=\omega^{pq/2}U_n^pV_n^q \tag{6.48}$$

をとる．$U_n^n=1$，$V_n^n=1$ より，n が偶数のとき，$p,q=-n/2,-n/2+1,\cdots,n/2-1$ のものを独立にとれて，n が奇数のとき，$p,q=-(n-1)/2,-(n-1)/2+1,\cdots,(n-1)/2$ のものを独立にとれる．基底の間の交換子は (6.47) を使うと

$$-i[J_{pq},J_{p'q'}]=-2\sin\left(\frac{\pi}{n}(pq'-p'q)\right)J_{p+p',q+q'} \tag{6.49}$$

であることがわかる．右辺は，$p,q\ll n$ のとき，

*3) 5.4 節で見た非可換トーラスの離散版で $d=2$ の場合とみなせる．

$$-\frac{2\pi}{n}(pq'-qp')J_{p+p',q+q'} \tag{6.50}$$

に帰着する．これは，

$$\frac{L^2}{2\pi}=n \tag{6.51}$$

の関係のもと，(6.44) に対応している．L^2 は 2 次元面の面積であり，一般論と確かに合っている．(6.48) のエルミート共役は再び (6.47) を使うと

$$J_{pq}^\dagger = J_{-p,-q} \tag{6.52}$$

であり，(6.45) に対応している．基底の内積はやはり (6.47) を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(J_{pq}^\dagger J_{p'q'}) &= \omega^{(pq'-p'q)}\mathrm{Tr}(J_{-p+p',-q+q'})\\ &= \begin{cases} n & p=p' \bmod n,\ q=q' \bmod n \\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}\end{aligned} \tag{6.53}$$

で，(6.51) の関係のもと，(6.46) に対応している．

正則化 (6.40) を (6.26) に適用すると

$$S=\alpha\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[A_\mu,A_\nu]^2-\frac{1}{2}\bar\psi\Gamma^\mu[A_\mu,\psi]\right)+2\pi\beta\mathrm{Tr}1 \tag{6.54}$$

になる．ここで，世界面上の場 X^μ に対応する $n\times n$ エルミート行列を A_μ と書いている．(6.32) は以下のようになる．

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\int dAd\psi e^{-S}. \tag{6.55}$$

A についての積分は n についての和に代わっている．dA と $d\psi$ は (2.40) のように，

$$\begin{aligned} dA &= \prod_\mu\left(\prod_i d(A_\mu)_{ii}\right)\left(\prod_{i>j} d\mathrm{Re}(A_\mu)_{ij}d\mathrm{Im}(A_\mu)_{ij}\right),\\ d\psi &= \prod_\alpha\left(\prod_i d(\psi_\alpha)_{ii}\right)\left(\prod_{i>j} d\mathrm{Re}(\psi_\alpha)_{ij}d\mathrm{Im}(\psi_\alpha)_{ij}\right)\end{aligned} \tag{6.56}$$

と定義される．このようにして，行列模型が得られる．

(6.39) に (6.40) を適用すると，

$$\delta\psi = i[\rho,\psi], \tag{6.57}$$

$$\delta A_\mu = i[\rho,A_\mu] \tag{6.58}$$

となる．ここで，ρ は任意のエルミート行列である．これは，N を n とすれば，(6.5) に一致する．また，超対称性 (6.30) と (6.31) に (6.40) を適用すると，それぞれ

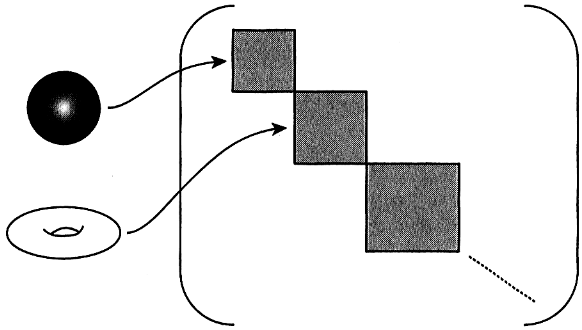


図 6.1　弦の多体系.

$$\delta^{(1)}\psi = \frac{i}{2}[A_\mu, A_\nu]\Gamma^{\mu\nu}\epsilon,$$
$$\delta^{(1)}A_\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi \tag{6.59}$$

と

$$\delta^{(2)}\psi = \xi,$$
$$\delta^{(2)}A_\mu = 0 \tag{6.60}$$

になる．(6.59) は (6.2) に，(6.60) は (6.3) に N を n にすれば一致する．(6.58) と (6.59) と (6.60) のもとで，(6.54) と (6.56) は不変であり，この行列模型はこの対称性を持つ．また，明らかにこの行列模型は (6.4) の対応物と 10 次元のローレンツ対称性も持つ．こうして，(6.5) は area preserving diffeomorphism に由来しており，(6.2) と (6.3) の 10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性は IIB 型超弦理論の Green-Schwarz 作用のそれに由来していることがわかる．

このように，Schild 型作用の経路積分は行列模型によって正則化されたわけだが，ここで強調しておくべきことがある．Schild 型作用は 1 体の弦の作用であり，弦の第 1 量子化を行っていることになる．一方，図 6.1 にあるように，行列模型でブロック対角な配位を考えると，行列模型の作用は各ブロックからの寄与の和で書けて，各々のブロックを対応 (6.40) により，Schild 型作用に対応させると弦の多体系を表せることがわかる．各々の弦の世界面のトポロジーはさまざまである．このとき，非対角ブロックは弦の間の相互作用を表していると自然に解釈される．こうして，行列模型は弦の第 2 量子化された理論になっている．

最後に，ここで得られた行列模型と IIB 行列模型 (6.1) との関係を見ておこう．違いは，(6.55) で行列サイズ n についての和があり，(6.54) で Tr1 に比例する項があるが，これらは IIB 行列模型にはないものである．ここで得られた行列模型と IIB 行列模型の積分の測度は (6.56) で同じである．IIB 行列模型で行列のサイズを N として，A_μ と ψ の全体の $N\times N$ 行列の中で $n\times n$ 対角ブ

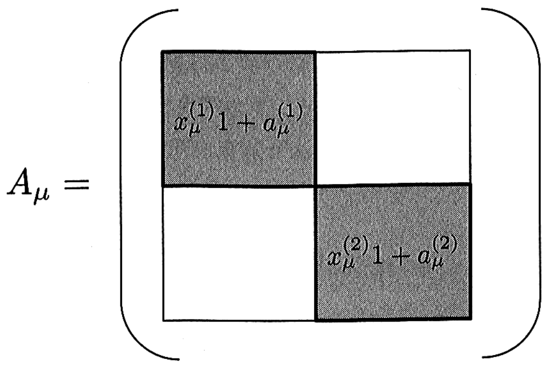


図 6.2　2 枚の D ブレーンを表す背景場.

ロックを考える．この対角部分以外を積分すれば，$n \times n$ 行列についての有効作用として，元の作用の形に加えて，リーディングの補正として $\beta\mathrm{Tr}1$ の項が得られる．β は化学ポテンシャルと解釈される.（他の A_μ と ψ についての高次の項は連続極限で効かないと期待される.）すなわち，(6.54) と (6.55) で定義される行列模型は IIB 行列模型の有効理論と考えられる．前者が大正準集合，後者が小正準集合に対応すると言える．前者で $\beta \to \beta_c$ とすることにより，後者の $N \to \infty$ の極限に等価になることが期待される．

6.3　D ブレーン間の相互作用

次に，D ブレーン間の長距離の相互作用が正しく再現されることを見てみよう．図 6.2 にあるような背景を考える．2 つのブロックの大きさを有限とすると，これは，2 つのインスタントン的な（すなわち時間ともに出現して消える）D ブレーンを表している．$a_\mu^{(1)}$ と $a_\mu^{(2)}$ はトレースレスとすると，$x_\mu^{(1)}$ と $x_\mu^{(2)}$ はそれぞれの D ブレーンの重心の位置に相当する．非対角ブロックを積分して 1 ループ計算をすると 2 つの D ブレーン間の有効ポテンシャルが得られる．D ブレーン間の距離が十分大きいとき，

$$W = \frac{1}{(x^{(1)} - x^{(2)})^8} \Big(-24\mathrm{tr}(f_{\mu\lambda}^{(1)} f_{\lambda\nu}^{(1)})\mathrm{tr}(f_{\mu\rho}^{(2)} f_{\rho\nu}^{(2)}) + 3\mathrm{tr}(f_{\mu\nu}^{(1)} f_{\mu\nu}^{(1)})\mathrm{tr}(f_{\lambda\rho}^{(2)} f_{\lambda\rho}^{(2)}) \Big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(x^{(1)} - x^{(2)})^9} \right) \tag{6.61}$$

となる．ここで，

$$f_{\mu\nu}^{(i)} = i[a_\mu^{(i)}, a_\nu^{(i)}] \quad (i = 1, 2) \tag{6.62}$$

である．計算の詳細は付録 E にゆずる．これは，図 6.3 の見られるような D ブ

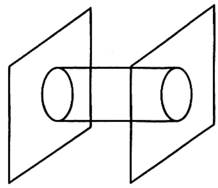


図 6.3　閉弦の交換による D ブレーン間の相互作用.

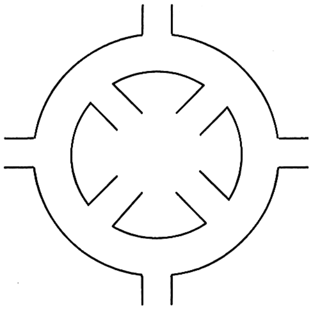


図 6.4　D ブレーン間の相互作用に対応する非プラナーダイアグラム.

レーン間の閉弦の交換を計算していることに相当すると考えられる．また，ダイアグラムで言うと，図 6.4 のような円環（シリンダー）のトポロジーに対応した非プラナーダイアグラムを計算していることに相当する．

有効ポテンシャル (6.61) は D ブレーン間の距離の 8 乗分の 1 に比例する．これはインスタントン的な D ブレーン間の 10 次元の massless 粒子の交換という解釈と合っている．D ブレーン間の距離が十分大きいときは massless 粒子の交換のみ効くことに注意したい．また，テンソルの足の構造に注目すれば，第 1 項は 2 階の対称テンソル場の交換，2 項目はスカラー場の交換と読み取れ，それぞれ**重力子**と**ディラトン**の交換と解釈することができる．時間的にコンパクトな物体を見ているので，電荷の保存側から **Ramond-Ramond 電荷**は持ち得ず，Ramond-Ramond の 2 形式や 4 形式の場の交換は見られなくてよいことに注意しよう *4)．このように，IIB 行列模型は D ブレーン間の長距離の相互作用を正しく再現する．なお，無限の大きさのブロックを考えると，例えば D1 ブレーンを表すことができて，D1 ブレーン間の距離の 6 乗分の 1 に比例する長距離の相互作用を正しく再現できる．

ここで見たように，ブロック間が十分離れると相互作用は落ちて，クラスター性が成り立っている．これは、図 6.2 の状況を一般化して多数ブロックがある状況を考えたとき，i 番目のブロックのトレース部分 $x_\mu^{(i)}$ は確かに i 番目のブ

*4)　ただし，Ramond-Ramond の 0 形式（Ramond-Ramond ディラトン）場の交換は含まれる．

ロックの重心であるという物理的解釈の正しさを保証する．A_μ や ψ の全体のトレース部分は作用 (6.1) に現われないのに，(6.3) や (6.4) に現われて $\mathcal{N}=2$ 超対称性の成立に重要な役割を果たすことは，一見すると問題であるが，各ブロックのトレース部分は物理的に意味があり，十分孤立した各ブロックで (6.3) や (6.4) を考えれば問題ない．

6.4 光円錐弦の場の理論の導出

この節では，IIB 行列模型の Schwinger-Dyson 方程式から IIB 超弦理論の光円錐弦の場の理論 **光円錐弦の場の理論**[77] を導出する[76]．光円錐場の理論は非摂動効果を見るには適さないが，摂動論的には問題がない．したがって，IIB 行列模型から IIB 超弦理論の光円錐弦の場の理論を導出できれば，IIB 行列模型が IIB 型超弦理論の摂動論を再現することを示したことになる．ここでは，IIB 行列模型のウィルソンループは弦の生成消滅演算子と同定される *5)．以下では，議論を簡単化するために，フェルミオンの行列は落とすが，実際はそれを入れて議論する必要がある．

IIB 行列模型のウィルソンループとして

$$W[k] = \mathrm{Tr}\left(P\exp\left(-i\int_0^{2\pi} d\sigma k^\mu(\sigma)A_\mu\right)\right) \tag{6.63}$$

を考える．ここで，$k^\mu(\sigma)$ は運動量空間での弦の埋め込み関数である．

このタイプのウィルソンループを考える動機をまず述べる．通常の d 次元のゲージ理論では，

$$W[x] = \mathrm{Tr}\left(P\exp\left(-i\int_0^{2\pi} d\sigma x'^\mu(\sigma)A_\mu(x)\right)\right) \tag{6.64}$$

の形のウィルソンループを考える．時空はトーラス T^d であるとする．

$$w^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma x'^\mu(\sigma) = x^\mu(2\pi) - x^\mu(0) \tag{6.65}$$

は μ 方向の巻きつき数である．ここで，トーラスの体積をゼロにして行列模型のウィルソンループを得る．

$$W[x] = \mathrm{Tr}\left(P\exp\left(-i\int_0^{2\pi} d\sigma x'^\mu(\sigma)A_\mu\right)\right). \tag{6.66}$$

弦理論の T 双対では，

$$x'^\mu \leftrightarrow k^\mu \tag{6.67}$$

---

*5) IIB 型超弦理論は自己 S 双対であり，S 双対のもとでファンダメンタルストリングと D ストリング（D1 ブレーン）が入れ替わる．ここで，ウィルソンループをファンダメンタルストリングに対応させると，6.2 節で Schild 弦に対応させたものは D ストリングということになる．

の置き換えをおこない，トーラスの半径を逆数にする．今，トーラスの体積は無限大になり，すなわち R^d を考えることになる．(6.66) は (6.63) になる．巻きつき数 (6.65) は全運動量になる．

$$P^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma k^\mu(\sigma). \tag{6.68}$$

これは，確かに T 双対の性質である．こうして，(6.63) が R^d $(d = 10)$ 上の弦を表すと期待される．

以下，(6.63) を

$$W[k] = \mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_0^{2\pi} d\sigma k(\sigma)\cdot A}\right) \tag{6.69}$$

と簡略化して書く．Schwinger-Dyson 方程式を導出する前に，$W[k]$ の汎関数微分に関する恒等式を 1 つ示す．そのために，

$$\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)} W[k] = -i\mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A} A_\mu e^{-i\int_0^\sigma d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right) \tag{6.70}$$

から出発する．これから，

$$\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' W[k] = \mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}[k(\sigma)\cdot A, A_\mu] e^{-i\int_0^\sigma d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right) \tag{6.71}$$

を得る．さらに汎関数微分することにより，

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma')}\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' W[k] \\
&= -i\theta(\sigma'-\sigma)\mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_{\sigma'}^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A} A^\mu P e^{-i\int_\sigma^{\sigma'} d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times [k(\sigma)\cdot A, A_\mu] P e^{-i\int_0^\sigma d\sigma_3 k(\sigma_3)\cdot A}\right) \\
&\quad - i\theta(\sigma-\sigma')\mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}[k(\sigma)\cdot A, A_\mu] P e^{-i\int_{\sigma'}^{\sigma} d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times A^\mu P e^{-i\int_0^{\sigma'} d\sigma_3 k(\sigma_3)\cdot A}\right)
\end{aligned} \tag{6.72}$$

を得る．これから，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma')}\right)'\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' W[k] \\
&= -i\delta(\sigma-\sigma')\mathrm{Tr}\left(P[A^\mu, [k(\sigma)\cdot A, A_\mu]] e^{-i\int_0^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}\right) \\
&\quad + \mathrm{Tr}\left(P[k(\sigma')\cdot A, A^\mu][k(\sigma)\cdot A, A_\mu] e^{-i\int_0^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}\right)
\end{aligned} \tag{6.73}$$

となるが，この両辺を $[\sigma - \frac{\epsilon}{2}, \sigma + \frac{\epsilon}{2}]$ の区間で σ' について積分すると，恒等式

$$
\left(\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})}-\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma-\frac{\varepsilon}{2})}\right)\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' W[k]
$$
$$
= -i\mathrm{Tr}\left(P[A^\mu,[k(\sigma)\cdot A, A_\mu]]e^{-i\int_0^{2\pi}d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}\right)
$$
$$
+\int_{\sigma-\frac{\varepsilon}{2}}^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}} d\sigma' \mathrm{Tr}\left(P[k(\sigma')\cdot A, A^\mu][k(\sigma)\cdot A, A_\mu]e^{-i\int_0^{2\pi}d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}\right) \tag{6.74}
$$

を得る．右辺第 2 項は $\epsilon \to 0$ 極限で効かない．

さて，ウィルソンループ (6.63) に対する Schwinger-Dyson 方程式（ループ方程式）を導出する．ループ方程式の導出は，2.7 節と 3.3 節と本質的に同じであるが，今度はループの結合を表す項もあることに注意する．ここでは以下のように $U(N)$ の基底 $t^a \quad (a=1,\cdots,N)$ を導入する．t^a は

$$
(t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} \tag{6.75}
$$

を満たす．これから，任意の $N\times N$ 行列 M_1，M_2 に対して，

$$
\mathrm{Tr}(M_1 t^a M_2 t^a) = \mathrm{Tr}(M_1)\mathrm{Tr}(M_2),
$$
$$
\mathrm{Tr}(M_1 t^a)\mathrm{Tr}(M_2 t^a) = \mathrm{Tr}(M_1 M_2) \tag{6.76}
$$

が成り立つ．A_μ を t^a で展開する．

$$
A_\mu = A_\mu^a t^a. \tag{6.77}
$$

次の，$l+1$ 個のループに対する Schwinger-Dyson 方程式を考える．

$$
0 = \int dA(-i)k_\mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}\left(\mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi}d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}t^a e^{-i\int_0^\sigma d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right)\right.
$$
$$
\left.\times W[k^{(1)}]\cdots W[k^{(l)}]e^{-S}\right). \tag{6.78}
$$

ここで，次の記法を導入する．

$$
X^\mu(\sigma) = i\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma)}, \tag{6.79}
$$

$$
W_\sigma[k] = Pe^{-i\int_0^\sigma d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi}d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}, \tag{6.80}
$$

$$
W_{\sigma\sigma'} = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_\sigma^{\sigma'}d\sigma_1 k(\sigma)\cdot A}\right) & (\sigma<\sigma') \\ \mathrm{Tr}\left(Pe^{-i\int_0^{\sigma'}d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}Pe^{-i\int_\sigma^{2\pi}d\sigma_2 k(\sigma_2)\cdot A}\right) & (\sigma>\sigma') \end{array}\right. . \tag{6.81}
$$

これらを用いると，(6.76) より，(6.78) は

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{-i}{g^2}\langle \mathrm{Tr}\left(P[A^\nu,[k(\sigma)\cdot A, A_\nu]]e^{-i\int_0^{2\pi} d\sigma_1 k(\sigma_1)\cdot A}\right) W[k^{(1)}]\cdots W[k^{(l)}]\rangle \\
- \int_0^{2\pi} d\sigma' k_\mu(\sigma)k^\mu(\sigma')\langle W_{\sigma\sigma'}[k]W_{\sigma'\sigma}[k]W[k^{(1)}]\cdots W[k^{(l)}]\rangle \\
- \sum_{i=1}^{l}\int_0^{2\pi} d\sigma' k_\mu(\sigma)k^{(i)\mu}(\sigma') \\
\times \langle \mathrm{Tr}(W_\sigma[k]W_{\sigma'}[k^{(i)}])W[k^{(1)}]\cdots \check{W}[k^{(i)}]\cdots W[k^{(l)}]\rangle \quad (6.82)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\check{W}[k^{(i)}]$ は $W[k^{(i)}]$ が存在しないことを表す．右辺第 1 項は作用の変分の寄与で，ループ $W[k]$ の変形に相当する．第 2 項はループ $W[k]$ の分裂に相当する．第 3 項はループ $W[k]$ とループ $W[k^{(i)}]$ の結合に相当する．

第 1 項は，(6.74) より，

$$
\frac{1}{g^2}\left(\frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma+\frac{\epsilon}{2})} - \frac{\delta}{\delta k_\mu(\sigma-\frac{\epsilon}{2})}\right)\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)'\langle W[k]W[k^{(1)}]\cdots W[k^{(l)}]\rangle \tag{6.83}
$$

と書ける．これはループ上に自然なカットオフ ϵ があるとして，

$$
-\frac{\epsilon}{g^2}X'^\mu(\sigma)^2\langle W[k]W[k^{(1)}]\cdots W[k^{(l)}]\rangle \tag{6.84}
$$

となる．

以下で，光円錐座標を導入する．

$$
\begin{aligned}
k^\pm(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(k^0(\sigma)\pm k^9(\sigma)), \\
A^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^9).
\end{aligned} \tag{6.85}
$$

これにより，

$$
k\cdot A = k^\mu A_\mu = -k^0A^0 + k^iA^i = -k^+A^- - k^-A^+ + k^iA^i \tag{6.86}
$$

と書ける．

$W[k] = W[k^-, k^+, k^i]$ の $k^-(\sigma)$ についての汎関数フーリエ変換を

$$
\tilde{W}[x^+, k^+, k^i] = \int \mathcal{D}k^- e^{-i\int_0^{2\pi} d\sigma k^-(\sigma)x^+(\sigma)} W[k^-, k^+, k^i] \tag{6.87}
$$

で定義する．以下では (6.82) において，0 番目のループ $W[k]$ について $i=0$ としよう．$i=0,1,\cdots,m \quad (m<l)$ に対して，$k^{(i)+}(\sigma)>0$ を仮定し，

$$
p^{(i)+} = \int_0^{2\pi} d\sigma k^{(i)+}(\sigma) > 0 \tag{6.88}
$$

であるとする．このとき，σ についての一般座標変換で，

$$
k^{(i)+} = \frac{p^{(i)+}}{2\pi} \tag{6.89}
$$

にもっていく．その上で，新しい座標と運動量密度を

$$
\begin{aligned}
\sigma_{new} &= \frac{p^{(i)+}}{2\pi}\sigma_{old}, \\
k^{(i)\mu}(\sigma_{new}) &= \frac{2\pi}{p^{(i)+}}k^{(i)\mu}_{old}(\sigma_{old})
\end{aligned}
\tag{6.90}
$$

と定義する．($k^{(i)+}_{new}(\sigma_{new}) = 1$ となる．) すると，

$$
\int_0^{2\pi} d\sigma k^{(i)\mu}_{old}(\sigma_{old})A_\mu = \int_0^{p^{(i)+}} d\sigma_{new}k^{(i)\mu}_{new}(\sigma_{new})A_\mu \tag{6.91}
$$

となる．また，

$$
X^{(i)\mu}_{new}(\sigma_{new}) = X^{(i)\mu}_{old}(\sigma_{old}) \tag{6.92}
$$

である．

$$
\varepsilon_{new} = \frac{p^+}{2\pi}\varepsilon_{old} \tag{6.93}
$$

とする．

一方，$i = m+1, \cdots, l$ に対しては，

$$
\begin{aligned}
&k^{(i)+}(\sigma) < 0, \\
&p^{(i)+} = \int_0^{2\pi} d\sigma k^{(i)+}(\sigma) < 0
\end{aligned}
\tag{6.94}
$$

とし，座標変換により，やはり (6.89) にもっていく．(6.90) と (6.92) は同様である．以下では，new の添字はとることにする．(6.82) においては，(6.4) の対称性より

$$
\sum_{i=0}^{l} p^{(i)+} = 0 \tag{6.95}
$$

でないと，期待値が残らない．

さて，$i = 0, 1, \cdots, m$ に対して，$x^{(i)+}(\sigma) = t = const.$ とおき，$i = m+1, \cdots, l$ に対して，$x^{(i)+}(\sigma) = -\infty$ とおく．この状況を図 6.5 に示している．そして，

$$
w[x^+ = t \text{ or } -\infty, p^+, k^i] = \tilde{W}[k] \tag{6.96}
$$

とおく．また，

$$
\begin{aligned}
p^+_{\sigma_1\sigma_2} &= \begin{cases} \sigma_2 - \sigma_1 & (\sigma_1 < \sigma_2) \\ p^+ + \sigma_2 - \sigma_1 & (\sigma_1 > \sigma_2) \end{cases}, \\
k^i_{\sigma_1\sigma_2}(\sigma) &= k^i(\sigma + p^+_{\sigma_1\sigma_2})
\end{aligned}
\tag{6.97}
$$

と定義する．(6.82) を σ について積分して，

$$
\int_0^{p^+} d\sigma \int_0^{p^+} d\sigma' \frac{1}{2}\left(i\frac{\delta}{\delta x^+(\sigma)} + i\frac{\delta}{\delta x^{(i)+}(\sigma')}\right)
$$
$$
\langle w[t, p^+_{\sigma\sigma'}, k^i_{\sigma\sigma'}] w[t, p^+_{\sigma'\sigma}, k^i_{\sigma'\sigma}] w[1]\cdots w[l]\rangle
$$
$$
= \frac{\varepsilon}{2g^2}\int_0^{p^+} (X_i'(\sigma))^2 \langle w[t, p^+, k^i] w[1]\cdots w[l]\rangle
$$
$$
+ \int_0^{p^+} d\sigma \int_0^{p^+} d\sigma' \frac{1}{2} k^i(\sigma) k^i(\sigma')
$$
$$
\times \langle w[t, p^+_{\sigma\sigma'}, k^i_{\sigma\sigma'}] w[t, p^+_{\sigma'\sigma}, k^i_{\sigma'\sigma}] w[1]\cdots w[l]\rangle
$$
$$
+ \sum_{i=1}^{l} \int_0^{p^+} d\sigma \int_0^{p^{(i)+}} d\sigma'
$$
$$
\frac{1}{2}\left(-i\frac{\delta}{\delta x^+(\sigma)} - i\frac{\delta}{\delta x^{(i)+}(\sigma')} + k^i(\sigma) k^{(i)i}(\sigma')\right)
$$
$$
\langle \mathrm{Tr}(w_\sigma w_{\sigma'}[i]) w[1]\cdots \check{w}[i]\cdots w[m] w[m+1]\cdots w[l]\rangle. \quad (6.98)
$$

ここで，左辺の時間微分は $\langle\ \ \rangle$ の中の最初の 2 つの因子のみに作用している．以下，連続極限（$N \to \infty$ 極限）での適当なスケーリングを仮定すると，右辺は光円錐の弦の場の理論のハミルトニアンの作用とみなすことができる．実際，左辺と右辺の第 2 項で小さなループが分裂するときの寄与と第 1 項と合わせて，

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\langle w[t, p^+, k^i] w[1]\cdots w[l]\rangle
$$
$$
= \int_0^{p^+} d\sigma \frac{1}{2}(k^i(\sigma)^2 + x'^i(\sigma)^2)\langle w[t, p^+, k^i] w[1]\cdots w[l]\rangle \quad (6.99)
$$

となり，フリー部分による時間発展を表す．左辺のその他の部分と右辺第 2 項のその他の部分は 3 点の相互作用で弦の分裂を表し，右辺第 3 項は 3 点の相互作用で弦の結合を表す．相互作用点に挿入される演算子も超対称性の代数から

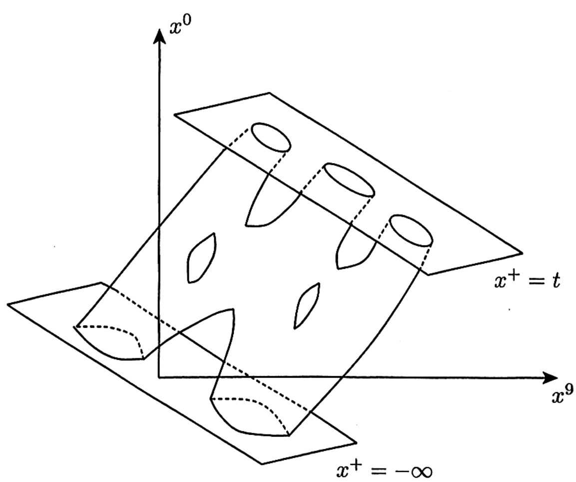


図 6.5　光円錐の設定.

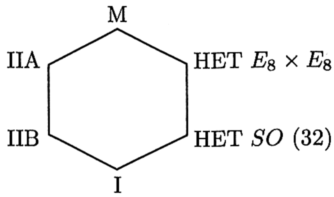


図 6.6 超弦理論の双対性.

一意的に決まるので，今，超対称性が保たれた正則化になっているので，連続極限で正しく再現される．

6.5 超弦理論の双対性

この章で見てきたように，IIB 行列模型は IIB 型超弦理論との対応が見える *6)．そうすると，IIB 行列模型は 10 次元で定義された超弦理論のひとつである IIB 型超弦理論だけを表しているにすぎないのではないかという疑問がわく．この疑問に完全に答えることは現時点ではできないが，以下にこの疑問に答えるひとつの議論を示そう．

1990 年代半ばの超弦理論の発展のひとつに双対性の予想がある．それは，10 次元で定義された 5 つの超弦理論（IIA 型超弦理論，IIB 型超弦理論，**I 型超弦理論**，$\boldsymbol{SO(32)}$ **ヘテロ超弦理論**，$\boldsymbol{E_8 \times E_8}$ **ヘテロ超弦理論**）および 11 次元で定義されると考えられている M 理論は，ひとつの「超弦理論」の異なるモデュライの点にすぎないという主張である（図 6.6）．そして，これらの点は強結合と弱結合を関係付ける S 双対性や第 4 章で触れた T 双対性の関係で結ばれている．例えば，I 型超弦理論と $SO(32)$ ヘテロ超弦理論は互いに S 双対で，I 型超弦理論の強結合領域は $SO(32)$ ヘテロ超弦理論で摂動論が有効な弱結合領域に対応する．この主張の証明はないが，主張についてはいくつかチェックがある．

さて，この主張を認めれば，強結合を扱えれば 6 つのうちどれから出発してもよいことになる．IIB 行列模型は IIB 型超弦理論の摂動論を再現しているが，それ自体は摂動論に依らずに定義されていて強結合領域も扱える定式化であるので，結局「超弦理論」を定義しているはずであるということである．このように，超弦理論の双対性が IIB 行列模型が超弦理論の非摂動的定式化になっていることの根拠のひとつである．

*6) Matrix Theory [7] は M 理論と，matrix string theory [8] は IIA 型超弦理論との対応が見える．I′ 型超弦理論との対応が見える行列模型として [75], [78] がある．

6.6 微分演算子解釈と曲った時空の実現

前節では，IIB 行列模型と平坦な 10 次元上の IIB 型超弦理論の対応を見たのであるが，超弦理論は重力理論であり，曲がった時空を表せる．特に，摂動論的な真空として曲がった時空が無数に存在している．IIB 行列模型が超弦理論の非摂動的定式化であるならば，曲がった時空を記述できてしかるべきである．それは，弦理論にとって長年の課題である背景に依らない定式化を構築することとも言える．

前節では IIB 行列模型において,「行列＝座標」の解釈をとったが，ここでは，ラージ N 還元や非可換空間上の場の理論との対応におけるように,「行列＝運動量」の解釈で曲がった時空を表せないか考えてみる[79]*7)．以下では，$\mathcal{M}$ を d 次元のリーマン多様体とし（$d \leq 10$ とする)，多脚場 e_μ^a が与えられているとする．IIB 行列模型のボゾン部分だけに注目し，A_μ $(\mu = 1, \cdots, 10)$ の足は局所ローレンツ系の足とみなし，A_a $(a = 1, \cdots, 10)$ と書く．

最も素朴には，A_a を $\mathcal{M}$ 上の関数空間に作用する線形演算子とみなし，背景として A_a $(a = 1, \cdots, d)$ を共変微分に同定すればよいように思える．

$$A_a = \nabla_a = e_a^\mu \nabla_\mu. \tag{6.100}$$

ここで，問題が 2 つほどある．1 つは A_a は多様体上で一般には大域的に定義されないということである．すなわち，重なりを持つ局所パッチ間を移るときに局所ローレンツ変換を受ける．もう 1 つは，

$$\nabla_a \nabla_b = e_a^\mu (\partial_\mu \nabla_b + \omega_{\mu b}^{\ \ c} \nabla_c) \tag{6.101}$$

であるから，(6.100) のもとでは，$\nabla_a \nabla_b$ が A_a と A_b の積とみなせないことである．

これらの問題を解決するために，多様体 $\mathcal{M}$ の接束に付随した正規直交枠束を考える．すなわち，接空間の正規直交基底全体のなす集合をファイバーとする $\mathcal{M}$ 上のファイバー束を考える．このファイバー束は $\mathcal{M}$ の接束に付随した $\boldsymbol{Spin(d)}$ **主束**と言うこともできる．

$\mathcal{M}$ には局所座標パッチ $\{U_i\}$ が備わっているとしよう．ここでは，接空間の足の添字として，$\mu, \nu, \lambda, \cdots$ を使い，局所ローレンツの添字として $a, b, c, \cdots$ を使う．$x_{[i]}^\mu$ $(\mu = 1, \cdots, d)$ を U_i の局所座標とする．$e_\mu^a(x_{[i]})$ を U_i 上の多脚場とすると，これから計量 $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^a$ が得られる．局所座標パッチ U_i と U_j が共有部分を持つとすると，共有部分では多脚場は U_i から U_j へ

$$e_\mu^a(x_{[j]}) = R(t_{ji}(x_{[i]}))_{ab} \frac{\partial x_{[i]}^\nu}{\partial x_{[j]}^\mu} e_\nu^b(x_{[i]}), \tag{6.102}$$

*7)　この問題に対する非可換幾何に基づくアプローチについては [80], [81] とその中の参考文献を参照されたい．

表 6.1　記法.

	接空間添字	局所ローレンツ添字	座標
全空間	M	A	z^M
底空間	μ	a	x^μ
ファイバー	$\dot{\mu}$	$\dot{a}$	$y^{\dot{\mu}}$

と変換される．ここで，$t_{ji}(x_{[i]}) \in Spin(d)$ であり，R_{ab} は $Spin(d)$ のベクトル表現の表現行列である．この行列は直交行列である．

$\mathcal{M}$ の接束に付随した正規直交枠束を P としよう．P は局所的には $U_i \times Spin(d)$ であり，その座標は $(x_{[i]}, g_{[i]})$ で与えられる．ここで，$g_{[i]} \in Spin(d)$ である．U_i と U_j は

$$(x_{[i]}, g_{[i]}) \sim (x_{[j]}, t_{ij}(x_{[j]})g_{[j]}). \tag{6.103}$$

に従って，貼り付けられる．

群多様体 $Spin(d)$ の座標系 $y^{\dot{\mu}}$ ($\dot{\mu} = 1, \cdots, d(d-1)/2$) を導入すると便利である．$Spin(d)$ における局所ローレンツの添字は $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \cdots$ で表す．右不変な 1 形式 $e^{\dot{a}}_{\dot{\mu}}(y)$ は，

$$dg(y)g^{-1}(y) = -ie^{\dot{a}}_{\dot{\mu}} t^{\dot{a}} dy^{\dot{\mu}}, \tag{6.104}$$

によって定義される．ここで，$t^{\dot{a}}$ ($\dot{a} = 1, \cdots, d(d-1)/2$) は $Spin(d)$ の生成子であり，交換関係

$$[t^{\dot{a}}, t^{\dot{b}}] = if_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}} t^{\dot{c}} \tag{6.105}$$

に従う．$f_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}$ は $Spin(d)$ の構造定数である．また，正規直交関係

$$\mathrm{tr}(t^{\dot{a}} t^{\dot{b}}) = \delta^{\dot{a}\dot{b}} \tag{6.106}$$

を満たす．右不変 1 形式は Maurer-Cartan 方程式

$$\partial_{\dot{\mu}} e^{\dot{a}}_{\dot{\nu}} - \partial_{\dot{\nu}} e^{\dot{a}}_{\dot{\mu}} - f_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}} e^{\dot{b}}_{\dot{\mu}} e^{\dot{c}}_{\dot{\nu}} = 0. \tag{6.107}$$

を満たす．

P の接空間の足の添字に大文字のギリシャ文字 $M, N, \Xi, \cdots$ を使い，P の局所ローレンツの添字に $A, B, C, \ldots$ を使う．すなわち，$M = (\mu, \dot{\mu})$，$A = (a, \dot{a})$ である．P の座標は $z^M_{[i]} = (x^\mu_{[i]}, y^{\dot{\mu}}_{[i]})$ で与えられる．表 6.1 に記法をまとめた．以下では，特に必要でない限り，$[i]$ の添字は省略する．

主束 P は平行化可能である．すなわち，P の各点で互いに線形独立は $d + d(d-1)/2$ のベクトル場が大域的に定義される．$d + d(d-1)/2$ は P の次元である．そのようなベクトル場の例は以下のように構成される．

$$E^a_\mu = R(g^{-1})_{ab}e^b_\mu(x), \quad E^a_{\dot{\mu}} = 0,$$
$$E^{\dot{a}}_\mu = -Ad(g^{-1})_{\dot{a}\dot{b}}b^{\dot{b}}_\mu, \quad E^{\dot{a}}_{\dot{\mu}} = Ad(g^{-1})_{\dot{a}\dot{b}}e^{\dot{b}}_{\dot{\mu}}(y). \tag{6.108}$$

ここで，$Ad_{\dot{a}\dot{b}}(g)$ は

$$gt^{\dot{a}}g^{-1} = Ad(g)_{\dot{b}\dot{a}}t^{\dot{b}}, \tag{6.109}$$

で定義される．(6.106) を使うと，

$$Ad(g)_{\dot{b}\dot{a}} = \mathrm{tr}(gt^{\dot{a}}g^{-1}t^{\dot{b}}) \tag{6.110}$$

であることがわかり，

$$\begin{aligned} Ad(g)_{\dot{b}\dot{a}}Ad(g)_{\dot{b}\dot{c}} &= \mathrm{tr}(gt^{\dot{a}}g^{-1}t^{\dot{b}})\mathrm{tr}(gt^{\dot{c}}g^{-1}t^{\dot{b}}) \\ &= \mathrm{tr}(gt^{\dot{a}}g^{-1}gt^{\dot{c}}g^{-1}) \\ &= \delta^{\dot{a}\dot{c}} \end{aligned} \tag{6.111}$$

より，$Ad(g)$ は直交行列であることがわかる．$b^{\dot{a}}_\mu$ は $\mathcal{M}$ 上のスピン接続 ω^{ab}_μ によって，

$$ib^{\dot{a}}_\mu(t^{\dot{a}})_{ab} = \omega^{ab}_\mu, \tag{6.112}$$

と定義される．ここで，$(t^{\dot{a}})_{ab}$ は $Spin(d)$ のベクトル表現の表現行列である．$b^{\dot{a}}_\mu$ の座標パッチ間の変換は，

$$b_{[j]} = idt_{ji}t^{-1}_{ji} + t_{ji}b_{[i]}t^{-1}_{ji}, \tag{6.113}$$

で与えられる．ここで，

$$b_{[i]} = b^{\dot{a}}_{[i]\mu}t^{\dot{a}}dx^\mu_{[i]} \tag{6.114}$$

である．(6.102)，(6.103)，(6.113) を用いると，$E^A = E^A_M dz^M$ が座標パッチに依らない，すなわち大域的に定義されることを見るのは易しい．

P 上の共変ベクトル場 $v = v^A E^A$ の平行移動を v^A が不変であるように定義することができる．これは，平行移動が経路に依らず，曲率がゼロであることを意味する．E^A_M を多脚場として採用すれば，P 上のスピン接続はゼロであり，曲率が消えていることは一目瞭然となる．スピン接続がゼロであるから，多脚場は

$$\partial_M E^A_N - \Gamma^\Xi_{MN}E^A_\Xi = 0 \tag{6.115}$$

を満たす．ここで，Γ^Ξ_{MN} はアフィン接続である．これから，

$$\Gamma^A_{BC} = E^A_M E^N_B E^\Xi_C \Gamma^M_{N\Xi} = E^M_B \partial_M E^A_N E^N_C \tag{6.116}$$

となる．ここで，E^M_A は E^A_M の逆行列である．トーション場

$$T^{\Xi}_{MN} = \Gamma^{\Xi}_{MN} - \Gamma^{\Xi}_{NM} \tag{6.117}$$

は一般に消えないことに注意しよう．$\mathcal{M}$ 上のトーション場が消えていることは仮定する．すなわち，以下の等式が成立する．

$$\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e^b_\nu - \omega^{ab}_\nu e^b_\nu = 0. \tag{6.118}$$

(6.108) より，E^M_A は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
&E^\mu_a = R(g^{-1})_{ab} e^\mu_b(x), \quad E^{\dot\mu}_a = R(g^{-1})_{ab} e^\mu_b(x) b^{\dot a}_\mu(x) e^{\dot\mu}_{\dot a}(y), \\
&E^\mu_{\dot a} = 0, \quad E^{\dot\mu}_{\dot a} = Ad(g^{-1})_{\dot a \dot b} e^{\dot\mu}_{\dot b}(y).
\end{aligned} \tag{6.119}$$

ここで，e^μ_a は e^a_μ の逆行列であり，$e^{\dot\mu}_{\dot a}$ は $e^{\dot a}_{\dot\mu}$ の逆行列である．

(6.104) と (6.107) と (6.118) を使って，トーション場は次のように求められる．

$$\begin{aligned}
&T^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} - \Gamma^A_{CB}, \\
&T^a_{bc} = 0, \quad T^a_{b\dot a} = -i(t^{\dot a})_{ab}, \quad T^a_{\dot a \dot b} = 0, \\
&i(t^{\dot a})_{cd} T^{\dot a}_{ab} = R(g^{-1})_{ae} R(g^{-1})_{bf} R(g^{-1})_{cg} R(g^{-1})_{dh} R_{ghef}, \\
&T^{\dot a}_{a\dot b} = 0, \quad T^{\dot a}_{\dot b \dot c} = -f_{\dot a \dot b \dot c}.
\end{aligned} \tag{6.120}$$

微分演算子 $\mathcal{L}_A = E^M_A \frac{\partial}{\partial z^M}$ は反変ベクトル場であり，大域的に定義される．特に，a-成分は次の形をとる[79]．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a &= R(g^{-1})_{ab} e^\mu_b(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + b^{\dot a}_\mu(x) e^{\dot\mu}_{\dot a}(y) \frac{\partial}{\partial y^{\dot\mu}} \right) \\
&= R(g^{-1})_{ab} e^\mu_b(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \omega^{ab}_\mu \mathcal{O}_{ab} \right).
\end{aligned} \tag{6.121}$$

ここで，$\mathcal{O}_{ab} = i(t^{\dot a})_{ab} e^{\dot\mu}_{\dot a} \frac{\partial}{\partial y^{\dot\mu}}$ は $Spin(d)$ における左移動の生成子である．$\mathcal{L}_a$ $(a = 1, \cdots, d)$ は大域的に定義され，さらに P 上ではスピン接続がゼロであるために，この節の冒頭で述べた 2 つの問題はなく，行列と思える．こうして任意の多様体が行列で表される．

$\mathcal{L}_A$ は以下の代数を満たす．

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B] = -T^C_{AB} \mathcal{L}_C, \\
&[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = -T^{\dot c}_{ab} \mathcal{L}_{\dot c}, \\
&[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_{\dot b}] = i(t^{\dot b})_{ca} \mathcal{L}_c, \\
&[\mathcal{L}_{\dot a}, \mathcal{L}_{\dot b}] = -f_{\dot a \dot b \dot c} \mathcal{L}_{\dot c}.
\end{aligned} \tag{6.122}$$

(6.1) でフェルミオンはゼロにおいた運動方程式は

$$[\mathcal{L}_b, [\mathcal{L}_b, \mathcal{L}_a]] = 0 \tag{6.123}$$

となる．(6.123) の左辺は (6.122) を使うと，

$$\left(-E_b^\mu \frac{\partial T_{ba}^{\dot{c}}}{\partial x^\mu} - E_b^{\dot{\mu}} \frac{\partial T_{ba}^{\dot{c}}}{\partial y^{\dot{\mu}}}\right)\mathcal{L}_{\dot{c}} - iT_{ba}^{\dot{c}} t_{cb}^{\dot{c}} \mathcal{L}_c \tag{6.124}$$

となる．ここで，(6.104) から導かれる関係式

$$\frac{\partial R(g^{-1})_{ab}}{\partial y^{\dot{\mu}}} = iR(g^{-1})_{ac} e_{\dot{\mu}}^{\dot{a}} (t^{\dot{a}})_{cb} \tag{6.125}$$

と (6.119) と (6.120) より，(6.124) は

$$it_{dc}^{\dot{c}} R(g^{-1})_{af} R(g^{-1})_{cg} R(g^{-1})_{dh} \nabla_e R_{efgh} \mathcal{L}_{\dot{c}} + R(g^{-1})_{ab} R(g^{-1})_{cd} R_{bd} \mathcal{L}_c \tag{6.126}$$

とまとまる．よって，(6.123) は

$$\nabla_e R_{efgh} = 0, \quad R_{ab} = 0 \tag{6.127}$$

に帰着する．第 1 式はビアンキ恒等式

$$\nabla_{[a} R^{bc}{}_{de]} = 0 \tag{6.128}$$

を使うと，第 2 式より導かれる．こうして，行列模型の運動方程式から真空中のアインシュタイン方程式が導かれる [79]．これは，弦理論から標的空間のアインシュタイン方程式（の拡張）が導かれるのに似ている．また，一般座標変換と局所ローレンツ変換は行列模型の $U(N)$ 対称性に含まれることを示すことができる [79]．

(6.121) のまわりのゆらぎから，高階スピンの場が多数でてくる．これらは，少なくともトリーレベルでは質量ゼロであり，弦理論から現われる粒子との関係はまだわかっていない．前節までの「座標」解釈との関係とともに，これを明らかにすることは今後の課題である *8)．

6.7 ユークリッド型模型のダイナミクス

理論を定義するときにユークリッド計量を用いるのか，ローレンツ計量を用いるのかの選択がある．それぞれを選択したときの模型をユークリッド型とローレンツ型と呼ぼう．ここでは，まず基本事項を押さえたうえで，ユークリッド型模型のダイナミクスの研究を紹介する．次節でローレンツ型模型のダイナミクスを調べる．

作用のボゾニック部分は，ユークリッド型では

$$S_b = \frac{1}{4g^2} \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}^2) \tag{6.129}$$

*8)　この節の解釈のもとでの有効作用の性質が [82] で調べられた．

表 6.2　ユークリッド型とローレンツ型の比較.

	ユークリッド型	ローレンツ型
ボゾニック作用	正定値	不定値
パフィアン	複素	実

である．ここで，$F_{\mu\nu}$ は

$$F_{\mu\nu} = i[A_\mu, A_\nu] \tag{6.130}$$

であり，エルミート行列である．よって，作用 (6.129) は正定値である．一方，ローレンツ型では，

$$S_b = \frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}(-2F_{0i}^2 + F_{ij}^2) \quad (i,j=1,2,\cdots,9) \tag{6.131}$$

であり，第 1 項と第 2 項の符号が異なり不定値である．

フェルミオンの行列の積分から生じるパフィアン

$$Pf(A) = \int d\psi e^{\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}(\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu,\psi])} \tag{6.132}$$

は A_μ の同次多項式である．次数は $16(N^2-1)/2$ である．16 は 10 次元のワイルフェルミオンの次元であり，2 で割るのはマヨラナだからである．N^2-1 は $SU(N)$ の随伴表現の次元である．ユークリッド型模型ではパフィアンは一般に複素数であり，ローレンツ型模型では実数である．これらを表 6.2 にまとめた．

文献 [83]〜[85] では，経路積分がカットオフなしに有限になり，よく定義されることが示された．詳しくは付録 F を参照されたい．これにより，長い間ユークリッド型模型のダイナミクスが調べられてきた．カットオフが必要ないことから，ユークリッド型模型では

$$A_\mu \to g^{\frac{1}{4}} A_\mu,$$
$$\psi \to g^{\frac{7}{8}} \psi$$

のように結合定数 g は吸収されてしまう．これは，ユークリッド模型では微調整できるパラメータがないことを意味する．g は次元を合わせるためのパラメータである．これは，弦理論では結合定数はディラトン場だけで決まり，自由なパラメータがない理論になっているはずであるということに合致している．

カットオフなしで理論がよく定義されるという点ではよいのだが，パフィアンが複素であることから，いわゆる**符号問題**が存在し，ユークリッド模型のモンテカルロシミュレーションは非常に難しい *9)．

*9)　ユークリッド型模型のトイ模型である 6 次元と 4 次元の超対称ヤン・ミルズ理論に対するユークリッド版還元模型の数値シミュレーションについては，それぞれ [86] と [87] を参照されたい．

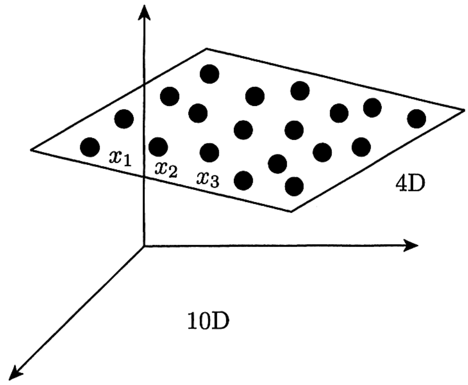


図 6.7　$SO(10)$ 対称性の $SO(4)$ への自発的破れ．

作用 (6.129) が最小値をとるのは

$$F_{\mu\nu} = 0 \tag{6.133}$$

のとき，すなわち，A_μ が同時対角的な配位をとるときであり，素朴にはこのような配位が優勢になると期待される．

A_μ を対角部分と非対角部分に分ける．

$$(A_\mu)_{ij} = (x_i)_\mu \delta_{ij} + (a_\mu)_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, N). \tag{6.134}$$

N 個の対角成分 $x_1, \cdots, x_N$ はそれぞれ 10 次元空間内の点に相当する．同時対角的な配位が優勢になるとすれば，これらの N 個の対角成分のダイナミカルな分布を考えることは意味がある．これら対角成分に対応する N 個の点が，もし図 6.7 に見られるように，10 次元空間内の 4 次元超平面上に分布したとすると，理論の $SO(10)$ 対称性が $SO(4)$ に自発的に破れたことになり，ユークリッドの 4 次元時空がダイナミカルに生成されたことを意味する．より，一般的には慣性モーメントテンソルに相当するオブザーバブル

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu) \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, 10) \tag{6.135}$$

（これは μ と ν の入れ替えについて対称）の 10 個の固有値を見て，$SO(10)$ の自発的対称性の破れを判定することができる．

さて，(6.134) において，x_i 達が十分離れているときは，1 ループ近似が良くなる．(E.11) の結果を用いると，x_i についての 1 ループ有効作用は

$$W = (10 - 2 - 8) \sum_{i>j} \log(x_i - x_j)^2 = 0 \tag{6.136}$$

となり消える．10 はボゾンの寄与，-2 は Fadeev-Popov ゴーストの寄与，-8 はフェルミオンの寄与である．こうして，1 ループ近似では固有値の間に力が

働かない．ただし，(6.136) においてはフェルミオンのゼロモード（対角成分）の寄与は入っていない．文献 [88] では，フェルミオンのゼロモードも考慮した1ループ近似により x_i 達に対する有効理論が得られている．それは (6.136) に比べてサブリーディングを見ていることになる．それによれば，x_i 達に対応する点が分岐高分子的なつながりを持った構造を持つ．ただし，正確に分岐高分子にはならない．分岐高分子のハウスドルフ次元が4ということから，$SO(10)$ から $SO(4)$ への自発的対称性の破れが起こる可能性が議論されたが，例えば数値シミュレーションでダイナミクスを完全に把握するのは難しく，また固有値が近づいたときの扱い方も明らかでないため，決着はついていない．

また，[89] ではパフィアンの複素位相が安定化するように $SO(10)$ 対称性が破れる機構が考察された．

実際，文献 [90]～[94] では，**ガウス展開法**という平均場近似の改良によって，オブザーバブル (6.135) の期待値が計算され，$SO(10)$ の自発的破れを示唆する結果が得られた．この近似の範囲内で何次元になるかはまだ確定していない．また，ガウス展開法が系統的な近似でないことにも注意したい．

他の4次元時空を示唆する結果としては，S^2 に比べて，$S^2 \times S^2$ に対する自由エネルギーが小さいことが示された[95]~[97]．

その他の興味深い結果としては，[98] において，コホモロジー的な位相的場の量子論のテクニックを使って，ユークリッド型の IIB 行列模型の分配関数が正確に求められた．

6.8 (3+1) 次元膨張宇宙の出現

この節では，IIB 行列模型の最近の研究成果を紹介する．平坦な時空上の場の量子論においても，実時間のダイナミクスをウィック回転した理論から引き出すのは難しい．また，平坦な時空上の場の量子論の場合と異なり，重力理論でのウィック回転は非自明である．これらを動機として，ローレンツ型模型を調べる．

ローレンツ型模型では，ボゾニック作用が不定値のため，一見系は不安定で理論は非摂動的によく定義されないと考えられる．文献 [99] では，ローレンツ型模型が非摂動的によく定義できることが示された．経路積分の重みを e^{-S_b} とする代わりに，e^{iS_b} として出発する．分配関数は

$$Z = \int dAPf(A)e^{iS_b}. \tag{6.137}$$

この因子 i は，Schild 型作用との対応において，ユークリッド型模型からローレンツ型模型を得るのに，標的空間とともに世界面も逆ウィック回転したと考えれば自然に理解できる *10)．

---

*10) 一方，6.4 節では e^{-S_b} で定義していることに相当し，この違いがどのくらい本質的な

このままでは，まだローレンツ型模型はよく定義されない．A_0 の積分が発散することが数値シミュレーションによってわかる．この発散を抑えるために，次の拘束条件を課す．

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_0)^2 \leq \kappa\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_i)^2 \ . \tag{6.138}$$

これは，スケール変換

$$A_\mu \to \rho A_\mu \tag{6.139}$$

のもとで不変である．これは，$SO(9,1)$ 対称性を $SO(9)$ 対称性に破り，$\mathcal{N}=2$ 超対称性も破るが，連続極限でこれらは回復すると期待してもよいだろう．いずれにせよ，Ward 恒等式の成立を見て，チェックする必要がある．

分配関数 (6.137) における e^{iS_b} は，ミンコフスキー空間での場の量子論の場合と同様に，位相因子である．この振動する積分を正則化するために，通常のように収束因子 $e^{-\epsilon|S_\mathrm{b}|}$ を導入し，積分した後に $\epsilon\to 0$ の極限をとる．分配関数は以下のように書ける．

$$Z=\int dA\int_0^\infty dr\,\delta\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_i)^2-r\right)e^{iS_\mathrm{b}-\epsilon|S_\mathrm{b}|}\mathrm{Pf}\mathcal{M}\ .$$

ここで，A_μ の積分は (6.138) によって制限されている．積分変数を

$$A_\mu \to r^{1/2}A_\mu \tag{6.140}$$

とリスケールし，r についての積分を先に実行すると，

$$\int_0^\infty dr\, r^{\frac{18}{2}(N^2-1)-1}e^{r^2(iS_\mathrm{b}-\epsilon|S_\mathrm{b}|)}\propto\frac{1}{|S_\mathrm{b}|^{\frac{18}{4}(N^2-1)}} \tag{6.141}$$

を得る．これは $S_\mathrm{b}=0$ に対して発散する．

この発散を抑えるために，拘束条件

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_i)^2\leq L^2 \tag{6.142}$$

をリスケーリング (6.140) の前に導入する．すると，r についての積分領域は $[0,L^2]$ になり，(6.141) は $f(S_\mathrm{b})$ になる．ここで，$f(x)$ は $x=0$ に鋭いピークを持つ関数である．こうして，ローレンツ型模型は

$$\begin{aligned}Z=&\int dA\,f\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right)\mathrm{Pf}\mathcal{M}(A)\\&\times\delta\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_i)^2-1\right)\theta\left(\kappa-\frac{1}{N}\mathrm{tr}(A_0)^2\right)\end{aligned} \tag{6.143}$$

に帰着する．ここで，$\theta(x)$ は階段関数である *11)．今，パフィアン $\mathrm{Pf}\mathcal{M}(A)$ は

のか今後理解する必要がある．

*11) ここで，C を負の定数として，$f\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right)$ を $f\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-C)\right)$ に置き換えたものは，2 行目の正則化を除いて，文献 [100] で「時空の不確定性原理」に動機付けられて提唱された行列模型である．

実数でラージ N では符号は一定なので，模型 (6.143) は符号問題なしで，モンテカルロシミュレーションで調べられる．ミンコフスキー空間での場の量子論ではこのようにはならない．ここでは，ボゾニック作用とパフィアンが A_μ の同次式であることが効いている．

さて，模型 (6.143) のモンテカルロシミュレーションの結果[99] を以下に述べる．

時間発展を見るために，A_0 を対角化する基底をとる．A_0 の固有値 t_a $(a = 1, \cdots, N)$ に対応する固有ベクトルを $|t_a\rangle$ とする．t_a は $t_1 < \cdots < t_N$ の順序を持っているとする．t_a はシミュレーションの配位ごとに決まり，最終的に平均をとる．すなわち，t_a の値はダイナミカルに決まることに注意したい．

この基底での空間方向の行列 A_i $(i = 1, \cdots, 9)$ は対角的でないが，シミュレーションの結果は非対角要素は対角要素から離れるにしたがって，急速に小さくなることを示している．この帯状対角的な構造の帯の幅を n としよう．概念図を図 6.8 に示している．これから，$n \times n$ の対角ブロック行列を定義することが自然に見える．

$$\bar{A}_i^{(ab)}(t) \equiv \langle t_{\nu+a}|A_i|t_{\nu+b}\rangle \quad (1 \le a, b \le n). \tag{6.144}$$

ここで，t は対応する A_0 の n 個の固有値の平均である．

$$t = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} t_{\nu+a} \quad (\nu = 0, \cdots, (N-n)). \tag{6.145}$$

$A(t)$ の t 依存性は滑らかになっていることがシミュレーションの結果よりわかる．また，A_i の帯状対角的な構造は時間的な局所性を保証している．こうして，「時間発展」の概念がダイナミカルに出てきた．これは，非自明なダイナミカルな結果である．A_i は時刻 t での 9 次元空間の構造を表すと解釈される．

図 6.9 に，空間の拡がり

$$R(t)^2 \equiv \frac{1}{n}\mathrm{tr}\bar{A}_i(t)^2 \tag{6.146}$$

を $N = 16$，$n = 4$ についてプロットしている．模型の $A_0 \to -A_0$ のもとでの対称性を反映して，結果は時間反転のもとで不変なので，$t < 0$ に対する結果のみ示している．図 6.9 からわかるように，κ の臨界値が存在して，それより大きな κ に対しては，$t = 0$ でのピークが大きくなっていく．

次に，$SO(9)$ 対称性の自発的破れを調べる．オーダーパラメータとして，9×9 正定値実対称行列を定義する．

$$T_{ij}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left\{\bar{A}_i(t)\bar{A}_j(t)\right\}. \tag{6.147}$$

これは慣性モーメントテンソルの類似物である．図 6.10 に，$\kappa = 4.0$ について $T_{ij}(t)$ の 9 個の固有値を t に対してプロットしている．9 個のうち 3 個の固有

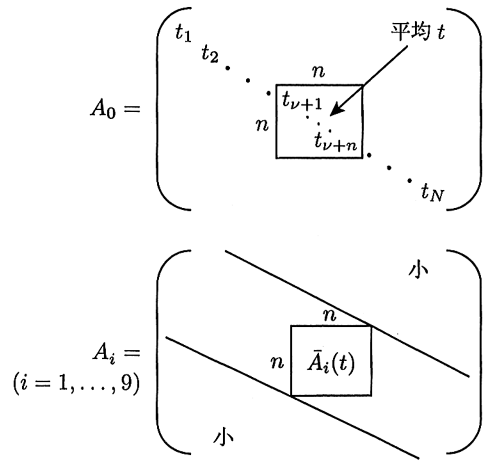


図 6.8　帯状対角的な構造と時間発展の概念.

値が臨界時刻 t_c で成長を始める．これは，t_c 以後に $SO(9)$ 対称性が $SO(3)$ に自発的に破れていることを示している．$R(t)^2$ は $T_{ij}(t)$ の 9 個の固有値の和に等しいことに注意されたい．

次に，$R(t)$ がスケールすることを見ることによって，赤外のカットオフ κ と L がラージ N 極限で取り除けることを示すことができる．これは 2 ステップで行われる．

(i) まず，κ を N とともに，$\kappa = \beta N^p$ $(p \simeq \frac{1}{4})$ で無限大にとばす．こうして得られる $R(t)$ のスケール曲線は β に依っている．

(ii) 次に，β を無限大にとばす．これは L を無限大にとばしていることに相当する．

場の量子論における (i) は連続極限に，(ii) は無限体積極限に相当する．こうして，2 つの拘束条件 (6.138) と (6.142) はラージ N 極限で取り除ける．得られる理論は 1 つのスケールパラメータ以外にパラメータを持たない（例えば $t = t_c$ での $R(t_c)$）．これは，弦理論は非摂動的には，弦の張力という 1 つのスケールパラメータしか持たないはずであるということと合っている．

以上の結果を得るのに，初期条件を定めることは何もしていないことに注意したい．すなわち，シミュレーションを行うのに任意の配位から出発してこの結果が得られる．このようにして，いわゆる宇宙論における初期値問題が克服されていると解釈される．また，t_c を「宇宙の始まり」と解釈すると，空間の非可換性から宇宙の始まりの特異点は避けられているように見える．

t_c を「宇宙の始まり」と解釈し，ここでの空間の拡がりをプランクスケールとすると，シミュレーションで見ているのはプランク時間のオーダーの時間である．より後の時刻を見るには N を大きくする必要がある．しかし，これは現時点でのコンピュータの能力からなかなか難しい．一方，空間の膨張により，後の

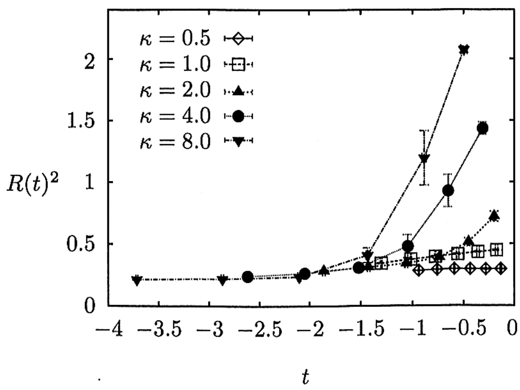


図 6.9　$R(t)^2$ の時間依存性．$N = 16$，$n = 4$．

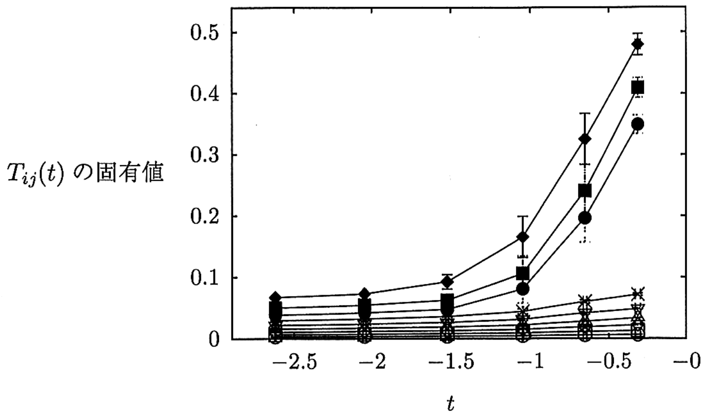


図 6.10　$T_{ij}(t)$ の 9 個の固有値の時間依存性．$N = 16$，$n = 4$，$\kappa = 4.0$．

時刻では作用が大きくなり，古典近似が良くなることが期待される．文献 [101] では，古典解を調べる系統的な方法が提示され，宇宙論的に興味深い解も見つけられた．古典解はラージ N 極限で無限個あることがわかるが，これは超弦理論の摂動的に許される真空が無数にあることを考えると不思議ではない．シミュレーションで N を大きくしていき，これらの古典解のうち，シミュレーションの結果にスムースにつながるものを見出す（それはユニークであるはずである）のが今後のやるべきことである．また，6.6 節との議論とも関係するが，曲った時空を同定することが課題の一つである．さらに，IIB 行列模型において物質場（カイラルフェルミオン）と標準模型がどのように得られるかが [103]〜[107] で考察された．

このように，IIB 行列模型から $3 + 1$ 次元の膨張宇宙が出現することを示唆する結果が得られた．今後の発展を期待したい．

付録 A
リューヴィル作用の導出

この付録ではリューヴィル作用を導出する．

まず，**藤川の方法**に従って，**熱核 (heat kernel)** を用いて導出する[107],[108]．$\mathcal{M}$ を 2 次元多様体とし，$\mathcal{M}$ 上の計量場を $g_{ab}(x)$ $(a, b = 1, 2)$ とする．$\mathcal{M}$ 上の質量なしの自由スカラー場を考える．作用は，

$$S = \int d^2x\sqrt{g}\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi \tag{A.1}$$

である．この作用は**ワイル変換**

$$g_{ab}(x) \to e^{\rho(x)}g_{ab}(x), \tag{A.2}$$

$$\phi(x) \to \phi(x) \tag{A.3}$$

のもとで不変である．分配関数

$$Z[g] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \tag{A.4}$$

において，経路積分の測度 $\mathcal{D}\phi$ はノルム

$$||\delta\phi||^2 = \int d^2x\sqrt{g}\delta\phi(x)\delta\phi(x) \tag{A.5}$$

より定義されている．ワイル変換 (A.3) のもとで，(A.5) は不変でないため，これより定義される積分測度 $\mathcal{D}X$ は不変でない．つまり，ワイル対称性に対する**量子異常**（**アノマリー**）がある．(A.4) は

$$\begin{aligned} Z[g] \sim (\det{}'\Delta_g)^{-\frac{1}{2}} &= \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\Delta_g\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}\langle x|\ln\Delta_g|x\rangle\right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

と書ける．ここで，$\sim$ はコンフォーマルモードに依存した部分のみ見ているという意味で，$\det{}'$ はゼロモードを除いた行列式を表す．また，ラプラシアン Δ_g は

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}g^{ab}\partial_b) \tag{A.7}$$

で与えられ，$\langle x|$ と $|x\rangle$ は以下のように規格化されている．

$$\langle x|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{(2)}(x-x'). \tag{A.8}$$

ここで，右辺は不変デルタ関数である．

さて，無限小ワイル変換

$$g_{ab}(x) \to e^{\delta\rho(x)}g_{ab}(x) \tag{A.9}$$

のもと，

$$Z[e^{\delta\rho}g] = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}\langle x|\delta\rho(x)|x\rangle\right] Z[g] \tag{A.10}$$

となる．これは，ノルム (A.5) から定義される積分測度の変化分として自然に理解できる（(B.9) と (B.10) の議論を参照）．(A.10) の右辺の exp の肩は発散するので，次のように一般座標変換不変性を保って正則化する．

$$\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}\delta\rho(x)\langle x|e^{-t\Delta_g}|x\rangle. \tag{A.11}$$

ここで，t は紫外のカットオフで $t\to 0$ の極限を最終的にとる．

ここで，熱核 $K_g^t(x,x')$ は方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_g\right)K_g^t(x,x') = \delta(t)\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_g(x-x') \tag{A.12}$$

を満たし，

$$K_g^t(x,x') = \theta(t)\langle x|e^{-t\Delta_g}|x\rangle \tag{A.13}$$

で与えられることに注意する．今，$g_{ab}(x) = e^{\sigma(x)}\delta_{ab}$ となる座標パッチをとる．$\sigma(0)=1$ として一般性を失わない．(A.12) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta - V(x)\right)K_g^t(x,0) = \delta(t)\delta^{(2)}(x) \tag{A.14}$$

となる．ここで，Δ は R^2 でのラプラシアン

$$\Delta = -\partial_a\partial_a \tag{A.15}$$

であり，

$$V(x) = (1-e^{-\sigma})\Delta \tag{A.16}$$

である．R^2 での熱核 $K^t(x,0)$ は方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)K^t(x,0) = \delta(t)\delta^{(2)}(x) \tag{A.17}$$

の解であり，

$$K^t(x,0) = \frac{1}{4\pi t}\theta(t)e^{-\frac{1}{4t}|x|^2} \tag{A.18}$$

で与えられる．ここで，$|x|^2 = x^a x^a$ である．

(A.14) は積分方程式

$$K_g^t(x,0) = K^t(x,0) + \int dt' \int d^2x' K^{t-t'}(x,x')V(x')K^{t'}(x',0) \tag{A.19}$$

に書き換えられる．これを逐次的に解くと，

$$\begin{aligned} K_g^t(x,0) =& K^t(x,0) + \int dt_1 \int d^2x_1 K^{t-t_1}(x,x_1)V(x_1)K^{t_1}(x_1,0) \\ &+ \int dt_1 dt_2 \int d^2x_1 d^2x_2 K^{t-t_2}(x,x_2)V(x_2)K^{t_2-t_1}(x_2,x_1) \\ &\qquad \times V(x_1)K^{t_1}(x_1,0) \\ &+ \cdots . \end{aligned} \tag{A.20}$$

$V(x)$ を $x^a = 0$ のまわりで展開すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} V(x) = \Bigg(& \partial_a\sigma(0)x^a + \frac{1}{2}(\partial_a\partial_b\sigma(0) - \partial_a\sigma(0)\partial_b\sigma(0))x^a x^b \\ &+ (\text{微分を 3 個以上含む項})\Bigg)\Delta. \end{aligned} \tag{A.21}$$

$K_g^t(0,0)$ を t で展開する．初項は $\mathcal{O}(1/t)$ だが，次元解析より σ に作用する微分が 1 つ増えるごとに t の冪が 1 つあがる．したがって，$\mathcal{O}(t^0)$ まで求めるためには，(A.21) の右辺の括弧内の第 1 項と第 2 項のみとればよい．(A.21) を (A.20) に代入し，$a > 0$ に対する公式

$$\begin{aligned} &\int d^2x e^{-\frac{|x|^2}{2a}} = 2\pi a, \\ &\int d^2x x^a x^b e^{-\frac{|x|^2}{2a}} = 2\pi a^2 \delta^{ab}, \\ &\int d^2x x^a x^b x^c x^d e^{-\frac{|x|^2}{2a}} = 2\pi a^3(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) \end{aligned} \tag{A.22}$$

を用いて計算する．$\partial_a\sigma(0)\partial_a\sigma(0)$ の項は (A.20) の第 2 項と第 3 項の間で相殺して，結果は

$$K^t(0,0) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1}{24\pi}\Delta\sigma(0) + \mathcal{O}(t) \tag{A.23}$$

となる．(2.20) から，$\Delta\sigma(0) = R(0)$ であることがわかる．よって，一般の x では

$$K^t(x,0) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1}{24\pi}R(x) + \mathcal{O}(t) \tag{A.24}$$

である．(A.11) は

$$\frac{1}{8\pi t}\int d^2x\sqrt{g}\delta\rho + \frac{1}{48\pi}\int d^2x\sqrt{g}R\delta\rho \tag{A.25}$$

となる．(2.19) と (2.20) を使って，ρ について積分すると，

$$Z[e^\rho g] = \exp\left[\frac{1}{8\pi t}\int d^2x\sqrt{g} + \frac{1}{48\pi}S_L(g,\rho)\right] Z[g] \tag{A.26}$$

となる．exp の肩の第 1 項は宇宙項に繰り込まれる．第 2 項がアノマリーの寄与である．

次に，Δ_{FP} を評価する．

$$\Delta_{FP}(\hat{g}) = \int dcdb \exp\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}b^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu c_\nu\right) \tag{A.27}$$

と書ける．ここで，c_μ はゴーストであり，$b^{\mu\nu}$ は反ゴーストでトレースレス対称テンソルである．スカラー場の場合と同様にしてワイルアノマリーを計算すると，

$$\Delta_{FP}(e^\rho\hat{g}) = \exp\left[-\frac{26}{48\pi}S_L(\hat{g},\rho)\right]\Delta_{FP}(\hat{g}) \tag{A.28}$$

となる．

次に，次元正則化によって導出する．$\mathcal{M}$ を 2 次元多様体とし，$(2-\epsilon)$ 次元多様体として，$\mathcal{M}\times R^{-\epsilon}$ を考える．以下，$D=2-\epsilon$ とする．$\mathcal{M}\times R^{-\epsilon}$ の計量場を $g_{ab}(x) \quad (a,b=1,\cdots,D)$ とする．$\mathcal{M}\times R^{-\epsilon}$ 上の質量なしの自由スカラー場を考える．作用は，

$$S = \int d^Dx\sqrt{g}\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi \tag{A.29}$$

である．分配関数

$$Z[g] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \tag{A.30}$$

は，$\epsilon\to 0$ で発散するので，S に相殺項 $S_{c.t.}[g]$ を加えて，

$$Z = \lim_{\epsilon\to 0}\int \mathcal{D}\phi e^{-(S+S_{c.t.})} \tag{A.31}$$

が有限になるようにする．

経路積分を実行するために，計量場を平坦な計量場から展開する．

$$g_{ab}(x) = \delta_{ab} + h_{ab}(x). \tag{A.32}$$

このとき，

$$g^{ab} = \delta_{ab} - h_{ab} + h_{ac}h_{cb} + \mathcal{O}(h^3), \tag{A.33}$$

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{1}{2}h_{aa} - \frac{1}{4}h_{ab}h_{ba} + \frac{1}{8}(h_{aa})^2 + \mathcal{O}(h^3) \tag{A.34}$$

である．また，

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_b h^{ac} + \partial_c h_{ba} - \partial_a h_{bc}) - \frac{1}{2}h_{ad}(\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc})$$
$$+ \mathcal{O}(h^3) \tag{A.35}$$

である．リーマン曲率テンソル，リッチテンソル，スカラー曲率は

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc}, \tag{A.36}$$
$$R_{bd} = R^a_{bad}, \tag{A.37}$$
$$R = g^{ab}R_{ab} \tag{A.38}$$

で定義されるが，(A.33)，(A.34)，(A.35) より，Einstein-Hilbert 作用は

$$\int d^D x \sqrt{g} R = \int d^D x \left(\frac{1}{4}\partial_a h_{bc}\partial_a h_{bc} - \frac{1}{4}\partial_a h_{bb}\partial_a h_{cc} + \frac{1}{2}\partial_a h_{bb}\partial_c h_{ac} - \frac{1}{2}\partial_a h_{bc}\partial_b h_{ac} \right) + \mathcal{O}(h^3) \tag{A.39}$$

となる．

方針は，h_{ab} の 2 次まで分配関数を計算し，D 次元の一般座標不変な形を読み取り，相殺項を決定する．(A.29) は，(A.33)，(A.34) より，

$$S = S_0 + S_{int}, \tag{A.40}$$
$$S_0 = \int d^D x \frac{1}{2}\partial_a \phi \partial_a \phi, \tag{A.41}$$
$$S_{int} = \int d^D x \frac{1}{2}\left(-h_{ab} + \frac{1}{2}h_{cc}\delta_{ab} + h_{ac}h_{cb} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cc} - \frac{1}{4}h_{cd}h_{db}\delta_{ab} \right) \partial_a \phi \partial_b \phi \tag{A.42}$$

と書ける．S_0 を自由パート，S_{int} を相互作用パートとして扱う．h_{ab} の 1 次のダイアグラムは図 A.1 で，2 次のダイアグラムは図 A.2 と図 A.3 である．ここで，波線は h_{ab}，実線は ϕ を表す．

図 A.1 と図 A.2 のダイアグラムの値はゼロである．なぜなら，

$$\int d^D x S_{ab}(x)\langle \partial_a \phi(x) \partial_b \phi(x) \rangle = -\frac{1}{2}\int d^D x S_{aa}(x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} 1 \tag{A.43}$$

であるが，次元正則化では $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} 1 = 0$ だからである．

図 A.3 のダイアグラムは

$$S_{ab} = \frac{1}{2}\left(-h_{ab} + \frac{1}{2}h_{cc}\delta_{ab} \right) \tag{A.44}$$

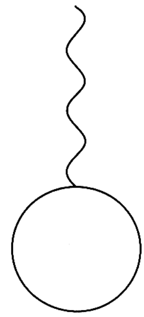


図 A.1　h_{ab} の 1 次のダイアグラム．

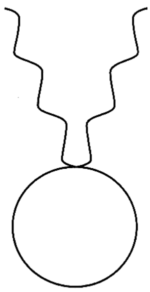


図 A.2　h_{ab} の 2 次のダイアグラム 1.

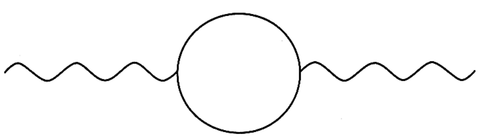


図 A.3　h_{ab} の 2 次のダイアグラム 2.

として，

$$\int d^D x d^D y S_{ab}(x) S_{cd}(y) \langle \partial_a \phi(x) \partial_c \phi(y) \rangle \langle \partial_b \phi(x) \partial_d \phi(y) \rangle$$
$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{S}_{ab}(p) \tilde{S}_{cd}(-p) I_{abcd}(p) \tag{A.45}$$

と書ける．ここで，

$$\tilde{S}_{ab}(p) = \int d^D x S_{ab}(x) e^{-ipx}, \tag{A.46}$$

$$I_{abcd}(p) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_a (k+p)_b k_c (k+p)_d}{k^2 (k+p)^2} \tag{A.47}$$

である．ループ積分は，ファインマンの公式を使って，

$$I_{abcd}(p) = I^{(1)}_{abcd}(p) + I^{(2)}_{abcd}(p) + I^{(3)}_{abcd}(p) + I^{(4)}_{abcd}(p), \tag{A.48}$$

$$I^{(1)}_{abcd}(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_a k_b k_c k_d}{(k^2 + 2xp \cdot k + xp^2)^2}, \tag{A.49}$$

$$I^{(2)}_{abcd}(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_a p_b k_c k_d}{(k^2 + 2xp \cdot k + xp^2)^2}, \tag{A.50}$$

$$I^{(3)}_{abcd}(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_a k_b k_c p_d}{(k^2 + 2xp \cdot k + xp^2)^2}, \tag{A.51}$$

$$I^{(4)}_{abcd}(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_a p_b k_c p_d}{(k^2 + 2xp \cdot k + xp^2)^2} \tag{A.52}$$

と書ける．標準的な次元正則化の積分公式より，

$$\begin{aligned}
&I^{(1)}_{abcd}(p) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(2)} \int_0^1 dx \left(\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) x^4 (xp^2 - x^2p^2)^{\frac{D}{2}-2} p_a p_b p_c p_d \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) x^2 (xp^2 - x^2p^2)^{\frac{D}{2}-1} \\
&\quad \times (\delta_{ab}p_c p_d + \delta_{cd}p_a p_b + \delta_{ac}p_b p_d + \delta_{bd}p_a p_c + \delta_{ad}p_b p_c + \delta_{bc}p_a p_d) \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right) (xp^2 - x^2p^2)^{\frac{D}{2}} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(-2\frac{p_a p_b p_c p_d}{p^2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3}(\delta_{ab}p_c p_d + \delta_{cd}p_a p_b + \delta_{ac}p_b p_d + \delta_{bd}p_a p_c + \delta_{ad}p_b p_c + \delta_{bc}p_a p_d) \\
&\quad \left. - \frac{1}{12}p^2 (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

と計算される．ここで，$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$ を使った．同様に，

$$\begin{aligned}
I^{(2)}_{abcd}(p) =& \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(2\frac{p_a p_b p_c p_d}{p^2} - \frac{1}{2}(\delta_{ac}p_b p_d + \delta_{ad}p_b p_c + \delta_{cd}p_a p_b) \right) \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^0),
\end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned}
I^{(3)}_{abcd}(p) =& \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(2\frac{p_a p_b p_c p_d}{p^2} - \frac{1}{2}(\delta_{ac}p_b p_d + \delta_{ab}p_c p_d + \delta_{bc}p_a p_d) \right) \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^0),
\end{aligned} \tag{A.55}$$

$$I^{(4)}_{abcd}(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(-2\frac{p_a p_b p_c p_d}{p^2} + \delta_{ac}p_b p_d \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{A.56}$$

と求められる．これらの結果を用いて，$S_{aa} = -\frac{\epsilon}{4}h_{aa}$ に注意すると，(A.45) は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^D x \left(-\frac{1}{4}\partial_b S_{ab} \partial_d S_{ad} + \frac{1}{6}\partial_c S_{ab} \partial_c S_{ab} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{A.57}$$

になる．これに，(A.44) を代入し，(A.39) と比較すると，

$$\frac{1}{24\pi\epsilon} \int d^D x \sqrt{g} R + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{A.58}$$

に等しいことがわかる．したがって，相殺項 $S_{c.t.}$ は (A.58) に等しい．
さて，ワイル変換 (A.3) のもと，

$$g^{ab} \to e^{-\rho} g^{ab}, \tag{A.59}$$

$$\sqrt{g} \to e^{\frac{D}{2}\rho} \sqrt{g}, \tag{A.60}$$

$$R \to e^{-\rho} \left(R + (1-D)\nabla^2 \rho + \frac{1}{4}(D-2)(1-D)\partial_a \rho \partial^a \rho \right) \tag{A.61}$$

と変換することから，

$$S \to S + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{A.62}$$

$$S_{c.t.} \to S_{c.t.} - \frac{1}{48\pi} S_L(g, \rho) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.63}$$

であることがわかる．よって，

$$Z(e^{\rho} g) = Z(g) e^{\frac{1}{48\pi} S_L(g,\rho)} \tag{A.64}$$

が言える．

付録 B

Van der Monde行列式

ここでは，(2.48) を導出する．まず，M はエルミート行列だから，ユニタリー行列 U を用いて $M = U^\dagger \Lambda U$ のように対角化できる．ここで，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N)$ である．M の $U(N)$ 不変な積分測度はノルム $||dM||^2 = \mathrm{tr}(dM)^2$ によって定義されていた．このノルムは以下のように書きかえられる．

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \mathrm{tr}(dM)^2 \\
&= \mathrm{tr}(dU^\dagger \Lambda U + U^\dagger d\Lambda U + U^\dagger \Lambda dU)^2 \\
&= \mathrm{tr}(dU^\dagger \Lambda U dU^\dagger \Lambda U + U^\dagger d\Lambda U U^\dagger d\Lambda U + U^\dagger \Lambda dU U^\dagger \Lambda dU \\
&\quad + 2dU^\dagger \Lambda U U^\dagger d\Lambda U + 2U^\dagger U dU^\dagger \Lambda U U^\dagger \Lambda dU + 2U^\dagger d\Lambda U U^\dagger \Lambda dU).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

ここで $d\Omega = dUU^\dagger$ とすると，$UU^\dagger = \mathbf{1}$ の変分をとることにより得られる関係式 $dUU^\dagger + UdU^\dagger$ を使って，$d\Omega^\dagger = UdU^\dagger = -dUU^\dagger = -d\Omega$ となる．すなわち，$d\Omega$ は反エルミートになる．これを用いると，(B.1) は

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \mathrm{tr}(d\Omega^\dagger \Lambda d\Omega^\dagger \Lambda + d\Lambda^2 + \Lambda d\Omega \Lambda d\Omega \\
&\quad + 2d\Omega^\dagger \Lambda d\Lambda + 2d\Omega^\dagger \Lambda^2 d\Omega + 2d\Lambda \Lambda d\Omega) \\
&= \mathrm{tr}(d\Lambda^2 - 2d\Omega \Lambda d\Omega^\dagger \Lambda + 2\Lambda^2 d\Omega d\Omega^\dagger)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

となる．ここで，Λ は対角行列なので $d\Lambda\Lambda = \Lambda d\Lambda$ とできることを用いた．以下では，(B.2) を成分で書きなおしていく．

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i,j,k,l}(-d\Omega_{ij}\Lambda_{jk}d\Omega^\dagger_{kl}\Lambda_{li} + \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}d\Omega_{kl}d\Omega^\dagger_{li}) \\
&= \sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i,j}(-d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji}\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji}) \\
&= \sum_i d\lambda_i^2 + \sum_{i,j}(\lambda_i^2 + \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j)d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

ここで，$d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji}$ は

$$
\begin{aligned}
d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji} &= d\Omega_{ij}d\Omega^*_{ij} && \text{(B.4)}\\
&= (d\mathrm{Re}\Omega_{ij})^2 + (d\mathrm{Im}\Omega_{ij})^2 && \text{(B.5)}\\
&= (-d\mathrm{Re}\Omega_{ji})^2 + (d\mathrm{Im}\Omega_{ji})^2 && \text{(B.6)}\\
&= d\Omega_{ji}d\Omega^\dagger_{ij} && \text{(B.7)}
\end{aligned}
$$

より $i \leftrightarrow j$ 対称なので，(B.3) は

$$
\begin{aligned}
||dM||^2 &= \sum_i d\lambda_i^2 + \sum_{i,j}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j)d\Omega_{ij}d\Omega^\dagger_{ji}\\
&= \sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2((d\mathrm{Re}\Omega_{ij})^2 + (d\mathrm{Im}\Omega_{ij})^2) \qquad \text{(B.8)}
\end{aligned}
$$

と最終的な表式に到達する．

さて，一般相対性理論で世界間隔の 2 乗（ノルム）が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, d) \tag{B.9}$$

で与えられたとき，座標変換で不変な体積要素は

$$\sqrt{\det g_{\mu\nu}}d^dx \tag{B.10}$$

で与えられたことを思い出そう．これに従い，(B.8) から計量を読み取り体積要素を作ると

$$dM = \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{i>j} d\mathrm{Re}\Omega_{ij}d\mathrm{Im}\Omega_{ij}2^{(N-1)/2}\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \tag{B.11}$$

となる．$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$ はいわゆる van der Monde 行列式の 2 乗である．この積分測度は定義より $U(N)$ 不変である．

同じ結果をゲージ場の量子論における Fadeev-Popov の方法にならって導出してみよう．今，行列 M をゲージ変換した行列を M^U と書く．

$$M^U = U^\dagger MU. \tag{B.12}$$

M^U を無限小ゲージ変換した変化分を δM^U とする．

$$\delta M^U = (1 - \varepsilon)M^U(1 + \varepsilon) - M^U = [M^U, \varepsilon]. \tag{B.13}$$

ここで，ε は無限小反エルミート行列である．ゲージ固定条件

$$M^U = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \tag{B.14}$$

を考える．このもとで，(B.13) は

$$(\delta M^U)_{ij}|_{M^U = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)} = (\lambda_i - \lambda_j)\varepsilon_{ij} \tag{B.15}$$

となる．M^U_{ij} $(i > j)$ の実部と虚部が独立の変数であることに注意すると，

$$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \tag{B.16}$$

がゲージ固定条件 (B.14) に対応した Fadeev-Popov 行列式であることがわかる．通常のように，

$$1 = \int dU \prod_{i>j}((\lambda_i - \lambda_j)^2 \delta(ReM^U_{ij})\delta(ImM^U_{ij})) \tag{B.17}$$

を分配関数に挿入する．

$$\begin{aligned} Z &= \int dU \int dM \prod_{i>j}((\lambda_i - \lambda_j)^2 \delta(ReM^U_{ij})\delta(ImM^U_{ij}))exp(-\mathrm{tr}V(M)) \\ &= \int dU \int dM^U \prod_{i>j}((\lambda_i - \lambda_j)^2 \delta(ReM^U_{ij})\delta(ImM^U_{ij}))exp(-\mathrm{tr}V(M^U)) \\ &= \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 exp\left(-\sum_{i=1}^{N} V(\lambda_i)\right). \end{aligned} \tag{B.18}$$

2 行目では dM と $\mathrm{tr}V(M)$ がゲージ不変であることを用いた．最後の行では，定数であるゲージ体積 $\int dU$ を無視した．こうして，欲しい結果が再び得られる．

付録 C

Green-Schwarz作用の超対称性と κ 対称性

この付録では，Green-Schwarz 作用の 10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性 (6.12) と κ 対称性 (6.13) を示す．

(6.9) の Green-Schwarz 作用を 2 つに分けておく．

$$S_{GS} = S_1 + S_2, \tag{C.1}$$

$$S_1 = -T\int d^2\sigma\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}, \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} S_2 = -T\int d^2 &\left(i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2)\right. \\ &\left.+\epsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma\ \mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\right). \end{aligned} \tag{C.3}$$

ここで,

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu, \tag{C.4}$$

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1 + i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2 \tag{C.5}$$

であった．

まず，10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性から示す．(6.12) のもとで，明らかに Π_a^μ は不変，よって，S_1 は不変である．S_2 の変分は

$$\begin{aligned} \delta S_2 = -T\int d^2\sigma &\left(i\epsilon^{ab}\partial_a(i\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\theta^1 - i\bar{\epsilon}^2\Gamma^\mu\theta^2)(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2)\right. \\ &+ i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar{\epsilon}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar{\epsilon}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \\ &\left.+\epsilon^{ab}\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2 + \epsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\epsilon}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\right). \end{aligned} \tag{C.6}$$

ここで，右辺の 2 行目は全微分項なので消える．結局,

$$\delta S_2 = -T\int d^2\sigma\left(-\epsilon^{ab}\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \epsilon^{ab}\bar{\epsilon}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\right) \tag{C.7}$$

となる．ここで，$D=3$ のマヨラナスピノール，$D=4$ のマヨラナスピノール，$D=6$ のワイルスピノール，$D=10$ のマヨラナワイルスピノールに対して成り立つ恒等式

$$\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi^{[a}\bar{\psi}^b\Gamma_\mu\psi^{c]}=0 \tag{C.8}$$

を使うと，(C.7) が消えることが示せる．ここで，a,b,c について完全反対称化しており，$\epsilon,\psi^a,\psi^b,\psi^c$ は上の種類のスピノールである．実際，(C.7) の右辺の第 1 項は，

$$\begin{aligned}&\int d^2\sigma\epsilon^{ab}\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1\\&=-\frac{1}{3}\int d^2\sigma\epsilon^{ab}\left(\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\partial_b\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_a\theta^1+\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\theta^1\partial_a\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1\right.\\&\qquad\left.+\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\partial_b\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\theta^1\right)\end{aligned} \tag{C.9}$$

と書ける．第 2 項も同様である．こうして，10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性が示された．

次に，κ 対称性を示す．準備として，2 次元の曲った時空上のガンマ行列を定義する．

$$\{\tilde{\Gamma}_a,\tilde{\Gamma}_b\}=-2h_{ab}, \tag{C.10}$$

$$\tilde{\Gamma}=\frac{1}{2\sqrt{-h}}\epsilon^{ab}\tilde{\Gamma}_a\tilde{\Gamma}_b. \tag{C.11}$$

ここで，h_{ab} は世界面上の計量場で，$h=\det h_{ab}$ である．次の 3 つの性質

$$\tilde{\Gamma}^2=1, \tag{C.12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\epsilon^{ab}\tilde{\Gamma}_b=-h^{ab}\tilde{\Gamma}_b\tilde{\Gamma}, \tag{C.13}$$

$$\{\tilde{\Gamma},\tilde{\Gamma}_a\}=0 \tag{C.14}$$

をまず示す．そのために，反変テンソル場についての以下の関係に注目する．

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\epsilon^{ab}\frac{1}{\sqrt{-h}}\epsilon^{cd}=-(h^{ac}h^{bd}-h^{ac}h^{bc}). \tag{C.15}$$

(C.15) と (C.10) を用いると，

$$\tilde{\Gamma}^2=-\frac{1}{4}(h^{ac}h^{bd}-h^{ad}h^{bc})\tilde{\Gamma}_a\tilde{\Gamma}_b\tilde{\Gamma}_c\tilde{\Gamma}_d=1 \tag{C.16}$$

を見ることは易しい．また，同様に，

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\epsilon^{ab}\tilde{\Gamma}_b\tilde{\Gamma}=-\frac{1}{2}(h^{ac}h^{bd}-h^{ad}h^{bc})\tilde{\Gamma}_b\tilde{\Gamma}_c\tilde{\Gamma}_d=-h^{ab}\tilde{\Gamma}_b \tag{C.17}$$

を得るが，(C.12) を使うと，(C.13) を得る．さらに，(C.10)，(C.11)，(C.13) を使って，(C.14) を示すことは易しい．

さて，以上の準備のもと，h_{ab} として世界面に誘導された計量場をとる．

$$h_{ab} = \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{C.18}$$

これは，

$$\tilde{\Gamma}_a = \Pi_a^\mu \Gamma_\mu \tag{C.19}$$

を意味する．また，

$$h = \frac{1}{2}\Sigma^2 \tag{C.20}$$

であることもわかる．

変換 (6.13) のもとで，Π_a^μ は

$$\delta\Pi_a^\mu = -2i\bar{\alpha}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1 + 2i\bar{\alpha}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2 \tag{C.21}$$

と変換する．(C.15) と (C.19) を使えば，

$$\Sigma_{\mu\nu}\delta\Sigma^{\mu\nu} = -4ihh^{ab}(\bar{\alpha}^1\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^1 - \bar{\alpha}^2\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^2) \tag{C.22}$$

となることがわかる．これと (C.20) から，

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}}(-\Sigma_{\mu\nu}\delta\Sigma^{\mu\nu}) \\ &= 2iT\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{ab}(\bar{\alpha}^1\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^1 - \bar{\alpha}^2\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^2)\end{aligned} \tag{C.23}$$

とまとまる．また，(C.8) と (C.19) を用いて，

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= -iT\int d^2\sigma 2\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\bar{\alpha}^1\Gamma_\mu\partial_a\theta^1 + \bar{\alpha}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \\ &= -2iT\int d^2\sigma\epsilon^{ab}(\bar{\alpha}^1\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^1 + \bar{\alpha}^2\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^2)\end{aligned} \tag{C.24}$$

を得るのは易しい．よって，

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 \\ &= 2iT\int d^2\sigma\sqrt{-h}\left[\left(h^{ab} - \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{-h}}\right)\bar{\alpha}^1\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^1\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \left(h^{ab} + \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{-h}}\right)\bar{\alpha}^2\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^2\right]\end{aligned} \tag{C.25}$$

となる．ここで，(C.12) と (C.13) を使うと，

$$\delta S = 2iT\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{ab}\left[\bar{\alpha}^1(1+\tilde{\Gamma})\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^1 - \bar{\alpha}^2(1-\tilde{\Gamma})\tilde{\Gamma}_a\partial_b\theta^2\right] \tag{C.26}$$

とまとまる．したがって，

$$\alpha^1 = (1+\tilde{\Gamma})\kappa^1 \quad (\bar{\alpha}^1 = \bar{\kappa}^1(1-\tilde{\Gamma})),$$
$$\alpha^2 = (1-\tilde{\Gamma})\kappa^1 \quad ((\bar{\alpha}^2 = \bar{\kappa}^1(1+\tilde{\Gamma})) \tag{C.27}$$

とすると，$\delta S = 0$ となる．

付録 D
南部・後藤弦とSchild弦の対応

この付録では，第 6 章で見た南部・後藤弦と Schild 弦の対応をさらに詳しく見てみよう [69]．簡単のために，フェルミオンは落として考えるが，フェルミオンを入れても議論は同様に進む．

世界面の座標を $\sigma^a \quad (a=1,2)$ とし，

$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \tag{D.1}$$

ここで，$\sqrt{g}$ は世界面上のスカラー密度で，$\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ は第 6 章の $\sigma^{\mu\nu}$ と異なり，世界面上の一般座標変換のもとで共変になっていることに注意したい．$\sqrt{g}$ として，具体的には世界面上の計量場 g_{ab} を用いて，$\sqrt{g}=\sqrt{\det(g_{ab})}$ とすればよい．

$\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ を使って，南部・後藤作用は

$$S_{NG} = -T\int d^2\sigma\sqrt{g}\sqrt{-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2} \tag{D.2}$$

と表される．$\sqrt{g}$ はこの中ではキャンセルしており，第 6 章で考えた南部・後藤作用のボゾニック部分に確かに等しい．

一方，**Schild** 作用

$$S_S = \int d^2\sigma\sqrt{g}\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \tag{D.3}$$

を定義する．この作用は第 6 章の Schild 型作用に比べて，$\sqrt{g}$ に比例する項がなく，$\sqrt{g}$ は変数ではなく固定されていると考える．ここでは，第 6 章の $\sqrt{g}$ の方程式が自動的に X^μ の方程式を使うと満たされることを見る．これは，(D.3) の運動方程式が (D.2) の運動方程式に等価であることを意味する．実際，(D.2) の運動方程式は

$$\partial_a\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-\tilde{\sigma}^2}}\frac{\partial\tilde{\sigma}^2}{\partial\partial_a X^\mu}\right) = 0 \tag{D.4}$$

であり，(D.3) の運動方程式は

$$\partial_a \left(\sqrt{g} \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_a X^\mu} \right) = 0 \tag{D.5}$$

であるが，(D.5) から第 6 章の $\sqrt{g}$ の方程式と等価である

$$\partial_a \tilde{\sigma}^2 = 0 \tag{D.6}$$

が言えれば，(D.4) と (D.5) は $\tilde{\sigma}^2 = 0$ の場合を除いて等価になる *1)．以下で，(D.6) を示す．なお，(D.6) に相当する行列模型の方程式は，Φ を任意の行列として，

$$[\Phi, [A_\mu, A_\nu]^2] = 0 \tag{D.7}$$

だが，行列模型の A_μ の方程式からこれは導けないので，第 6 章ではここでの結果を使っていない．

さて，(D.6) を示そう．まず，次の恒等式を示す．

$$\partial_b X^\mu \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_a X^\mu} = \delta^a_b \tilde{\sigma}^2. \tag{D.8}$$

実際，上式の左辺は

$$\begin{aligned}
&\partial_b X^\mu \frac{\partial \tilde{\sigma}^{\lambda\rho}}{\partial \partial_a X^\mu} \tilde{\sigma}_{\lambda\rho} \\
&= \partial_b X^\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\epsilon^{ac} \delta^\lambda_{\ \mu} \partial_c X^\rho + \epsilon^{ca} \delta^\rho_{\ \mu} \partial_c X^\lambda \right) \tilde{\sigma}_{\lambda\rho} \\
&= \frac{2}{\sqrt{g}} \partial_b X^\mu \epsilon^{ac} \partial_c X^\rho \tilde{\sigma}_{\mu\rho} \\
&= \epsilon^{ac} \epsilon_{bc} \tilde{\sigma}^{\mu\rho} \tilde{\sigma}_{\mu\rho} \\
&= \delta^a_b \tilde{\sigma}^2
\end{aligned} \tag{D.9}$$

となり，証明される．(D.5) より，

$$\partial_a \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_a X^\mu} \right) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_a X^\mu} \tag{D.10}$$

が成り立つ．これと (D.8) を用いると，

$$\begin{aligned}
\partial_a \left(\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) &= \partial_a \partial_b X^\mu \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_b X^\mu} - 2 \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \\
&= \partial_b \left(\partial_a X^\mu \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_b X^\mu} \right) - \partial_a X^\mu \partial_b \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_b X^\mu} \right) - \frac{2}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \\
&= \partial_a \tilde{\sigma}^2 + \partial_a X^\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_b \sqrt{g} \frac{\partial(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)}{\partial \partial_b X^\mu} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} \tilde{\sigma}^2 \\
&= \partial_a \tilde{\sigma}^2
\end{aligned} \tag{D.11}$$

となり，(D.6) が示される．

---

*1) 元々，Schild 弦は張力のない弦を扱うために考えられた．これは (6.26) で $\beta = 0$ に相当し，このとき $\tilde{\sigma}^2 = 0$ となる．

付録 E
1ループ有効作用の計算

この付録では，IIB 行列模型における 1 ループ有効作用を求める．

場の量子論における背景場の方法の場合と同じように，行列 A_μ と ψ を背景と量子ゆらぎに分ける．

$$A_\mu = p_\mu + \tilde{a}_\mu, \tag{E.1}$$

$$\psi = \chi + \tilde{\varphi}. \tag{E.2}$$

ここで，p_μ と χ が背景で，$\tilde{a}_\mu$ と $\tilde{\varphi}$ が量子ゆらぎである．作用 (6.1) を量子ゆらぎの 2 次まで展開する．

$$\begin{aligned} S_2 = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\Bigg(&\frac{1}{4}[p_\mu, p_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma^\mu[p_\mu, \chi] \\ &- \tilde{a}_\nu\left([p_\mu, [p_\mu, p_\nu]] + \frac{1}{2}[\bar{\chi}\Gamma^\nu, \chi]\right) + \bar{\chi}\Gamma^\mu[p_\mu, \tilde{\varphi}] \\ &+ \frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\nu]^2 - \frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\mu]^2 + [p_\mu, p_\nu][\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu] \\ &+ \frac{1}{2}\bar{\tilde{\varphi}}\Gamma^\mu[p_\mu, \tilde{\varphi}] + \bar{\chi}\Gamma^\mu[\tilde{a}_\mu, \tilde{\varphi}]\Bigg). \end{aligned} \tag{E.3}$$

(E.3) の右辺の 2 行目は量子ゆらぎの 1 次の項で，運動方程式より消えるか，または背景場の方法では落とす．ゲージ対称性

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i[A_\mu, \alpha], \\ \delta\psi &= i[\psi, \alpha] \end{aligned} \tag{E.4}$$

を固定するために，次のゲージ固定項と Fadeev-Popov ゴースト項を加える．

$$S_{g.f.} = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\mu]^2 + [p_\mu, b][p_\mu, c]\right). \tag{E.5}$$

ここで，c はゴーストであり，b は反ゴーストである．

以下では，$\chi = 0$ とおく．量子ゆらぎの 1 次の項を落として，

$$\begin{aligned}\tilde{S}_2 &= S_2 + S_{g.f.} \\ &= -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\nu]^2 + [p_\mu, p_\nu][\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu] + \frac{1}{2}\bar{\varphi}\Gamma^\mu[p_\mu, \varphi]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + [p_\mu, b][p_\mu, c]\right). \end{aligned} \tag{E.6}$$

ここで，次の記法を導入する．

$$[o, X] = OX. \tag{E.7}$$

これを使って，(E.6) を書き換える．

$$\tilde{S}_2 = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\tilde{a}_\mu(P_\lambda^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu})\tilde{a}_\nu - \frac{1}{2}\bar{\tilde{\varphi}}\Gamma^\mu P_\mu\tilde{\varphi} + bP_\lambda^2 c\right). \tag{E.8}$$

ここで，

$$[p_\mu, X] = P_\mu X, \tag{E.9}$$

$$[f_{\mu\nu}, X] = F_{\mu\nu}X, \quad f_{\mu\nu} = i[p_\mu, p_\nu] \tag{E.10}$$

である．これより，1ループ有効作用 W は

$$\begin{aligned} W &= -\log\int dad\varphi dcdbe^{-\tilde{S}_2} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log(P_\lambda^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\log\left((P_\lambda^2 + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu})\frac{1+\Gamma_{11}}{2}\right) \\ &\quad - \mathrm{Tr}\log(P_\lambda^2) + i\theta. \end{aligned} \tag{E.11}$$

ここで，θ はアノマリー項である．$F_{\mu\nu} = 0$ のときや，少なくとも1つの i について $P_i = 0$ のとき，$\theta = 0$ になる．後者は

$$\det(\Gamma^\mu P_\mu)^\dagger(\Gamma^\nu P_\nu) = \det(\Gamma^i\Gamma^\mu P_\mu)^2 \tag{E.12}$$

だからである．以下では実部だけ見る．

さて，図 6.2 の背景のまわりの有効作用を求めよう．背景は

$$A_\mu = p_\mu = \begin{pmatrix} p_\mu^{(1)} & \\ & p_\mu^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{E.13}$$

$$p_\mu^{(i)} = x_\mu^{(i)} 1_{n_i} + a_\mu^{(i)} \quad (i = 1, 2) \tag{E.14}$$

である．$a_\mu^{(i)}$ は $n_i \times n_i$ のエルミート行列である．(E.9) と (E.10) において，X の (i, j) ブロック $(i, j = 1, 2)$ を $X^{(i,j)}$ と記す．P_μ と $F_{\mu\nu}$ は各 $X^{(i,j)}$ に独立に作用する．実際，

$$(P_\mu X)^{(i,j)} = (x_\mu^{(i)} - x_\mu^{(j)})X^{(i,j)} + a_\mu^{(i)}X^{(i,j)} - X^{(i,j)}a_\mu^{(j)} \tag{E.15}$$

である．ここで，この式を簡単にするために次の記法を導入する．

$$
\begin{aligned}
x_\mu^{(i,j)} X^{(i,j)} &= (x_\mu^{(i)} - x_\mu^{(j)}), \\
P_{L\mu}^{(i,j)} X^{(i,j)} &= a_\mu^{(i)} X^{(i,j)}, \\
P_{R\mu}^{(i,j)} X^{(i,j)} &= -X^{(i,j)} a_\mu^{(j)}.
\end{aligned} \tag{E.16}
$$

$x_\mu^{(i,j)}$ と $P_{L\mu}^{(i,j)}$ と $P_{R\mu}^{(i,j)}$ は互いに可換である．(E.15) は

$$
(P_\mu X)^{(i,j)} = (x_\mu^{(i,j)} + P_{L\mu}^{(i,j)} + P_{R\mu}^{(i,j)}) X^{(i,j)} \tag{E.17}
$$

と書ける．$F_{\mu\nu}$ も同様に簡単化できる．(E.10) における $f_{\mu\nu}$ は

$$
f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f_{\mu\nu}^{(1)} & \\ & f_{\mu\nu}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{E.18}
$$

$$
f_{\mu\nu}^{(i)} = i[a_\mu^{(i)}, a_\nu^{(i)}] \quad (i = 1, 2) \tag{E.19}
$$

である．$F_{\mu\nu}$ は (E.17) と同様に，

$$
(F_{\mu\nu} X)^{(i,j)} = (F_{L\mu\nu}^{(i,j)} + F_{R\mu\nu}^{(i,j)}) X^{(i,j)} \tag{E.20}
$$

と分解できる．ここで，

$$
\begin{aligned}
F_{L\mu\nu}^{(i,j)} X^{(i,j)} &= f_{\mu\nu}^{(i)} X^{(i,j)}, \\
F_{R\mu\nu}^{(i,j)} X^{(i,j)} &= -X^{(i,j)} f_{\mu\nu}^{(j)}
\end{aligned} \tag{E.21}
$$

である．L と R の作用は独立であるから，$\mathcal{O}$ を P_μ と $F_{\mu\nu}$ から成る演算子とすると，

$$
\mathrm{Tr}\mathcal{O} = \sum_{i,j=1}^{2} \mathrm{tr}\mathcal{O}_L^{(i,j)} \mathrm{tr}\mathcal{O}_R^{(i,j)}. \tag{E.22}
$$

(E.11) を $x_\mu^{(i,j)}$ の逆冪で展開したい．(E.11) において，log を展開した後，ガンマ行列のトレースがとれる．超対称性のおかげで，$F_{\mu\nu}$ の 3 次までボゾンとフェルミオンの寄与は相殺し，(E.11) は

$$
\begin{aligned}
W = &- \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\nu\lambda}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\rho\mu}\right) \\
&- 2\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\mu\rho}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\right) + \mathcal{O}((F_{\mu\nu})^5)
\end{aligned} \tag{E.23}
$$

となる．(E.17) と (E.20) のように，P_μ と $F_{\mu\nu}$ は (i,j) ブロックに独立に作用するので，W は (i,j) ブロックの寄与 $W^{(i,j)}$ の和として表される．よって，$W^{(1,2)}$ は 1 番目のブロックと 2 番目のブロックの間の相互作用を表している

と考えられる．(E.17) と (E.20)，(E.22)，(E.23) より，$1/\sqrt{(x^{(1)}-x^{(2)})^2}$ のリーディングで，

$$
\begin{aligned}
W^{(1,2)} =& \frac{1}{(x^{(1)}-x^{(2)})^8}\Bigl(-\mathrm{Tr}^{(1,2)}(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F_{\rho\mu}) \\
&\qquad - 2\mathrm{Tr}^{(1,2)}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\mu\rho}F_{\lambda\nu}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}^{(1,2)}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}) \\
&\qquad + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}^{(1,2)}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho})\Bigr) \\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(x^{(1)}-x^{(2)})^9}\right) \\
=& \frac{1}{(x^{(1)}-x^{(2)})^8}\Bigl(-12\mathrm{tr}(f^{(1)}_{\mu\lambda}f^{(1)}_{\lambda\nu})\mathrm{tr}(f^{(2)}_{\mu\rho}f^{(2)}_{\rho\nu}) \\
&\qquad + \frac{3}{2}\mathrm{tr}(f^{(1)}_{\mu\nu}f^{(1)}_{\mu\nu})\mathrm{tr}(f^{(2)}_{\lambda\rho}f^{(2)}_{\lambda\rho})\Bigr) \\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(x^{(1)}-x^{(2)})^9}\right)
\end{aligned}
\tag{E.24}
$$

と求められる．ここでは，ブロック間の相互作用に注目し，ブロック自身のくりこみに寄与すると考えられる $n_i\mathrm{tr}(f^{(j)}f^{(j)}f^{(j)}f^{(j)})$ $(i \neq j)$ に比例する項は落とした．$W^{(1,2)}$ と $W^{(2,1)}$ を足して，(6.61) を得る．

付録 F
ユークリッド型模型の有限性

この付録では，ユークリッド模型の有限性を示す[84],[85]．

以下の議論においては，(6.1) で $4g^2=1$ と一般性を失わずにおける．まず，フェルミオンを落としたボゾニック模型を考える．分配関数は

$$Z_{d,G}=\int\prod_{\lambda=1}^{d}dA_\lambda\exp\left(\mathrm{Tr}([A_\mu,A_\nu]^2\right) \tag{F.1}$$

と書ける．ここで，A_μ はコンパクトリー群 G のリー代数 $\mathcal{G}$ に属している．後で，$G=SU(N)$ とするが，初めは一般の G で議論する．

(F.1) の積分において，A_μ の大きさが大きく互いに可換な配位が発散を生じうるので，A_μ の大きさを分離して考える．

$$A_\mu=Rx_\mu, \tag{F.2}$$

$$\mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu)=1 \tag{F.3}$$

のように A_μ の大きさを R とする．このもとで，(F.1) は

$$Z_{d,G}=\int_0^\infty dRR^{dg-1}\mathcal{X}_{d,G}(R) \tag{F.4}$$

となる．g は $\mathcal{G}$ の次元であり，$\mathcal{X}_{d,G}(R)$ は

$$\mathcal{X}_{d,G}(R)=\int\prod_{\nu=1}^{d}dx_\nu\delta(1-\mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu))\exp\left(-R^4S_{\mathcal{G}}\right) \tag{F.5}$$

で定義され，

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{G}}&=-\mathrm{Tr}([x_\mu,x_\nu][x_\mu,x_\nu])\\&=\sum_{i,j}|[x_\mu,x_\nu]_{ij}|^2\end{aligned} \tag{F.6}$$

である．$S_{\mathcal{G}}$ は半正定値であり，

$$\chi_{d,G}(R) < \int \prod_{\mu=1}^{d} dx_\mu \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu)) \tag{F.7}$$

より，ある定数によって任意の R に対して $\mathcal{X}_{d,G}(R)$ は押さえられているため，確かに $Z_{d,G}$ で発散を生じうるのは R が大きいところからの寄与である．もし，大きな R に対して，

$$|\mathcal{X}_{d,G}(R)| < \frac{const.}{R^\alpha} \quad (\alpha > dg) \tag{F.8}$$

であれば，分配関数 $Z_{d,G}$ は有限である．以下で (F.8) の不等式を示す．以下では，(添字つきの) A, B, $C, \cdots$ はある定数を表す．

大きな R に興味があるので，常に $R > 1$ と仮定する．(F.5) において，積分領域を 2 つに分ける．

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1(\mathcal{G}) : S_\mathcal{G} < R^{-2(2-\eta)}, \\ &\mathcal{R}_2(\mathcal{G}) : S_\mathcal{G} \geq R^{-2(2-\eta)}. \end{aligned} \tag{F.9}$$

ここで，η は正の小さな数である．$\mathcal{R}_2(\mathcal{G})$ から $\mathcal{X}_{d,G}(R)$ への寄与は $A_1 \exp(-R^{2\eta})$ で押さえられる．この寄与は (F.8) を満たしている．$\mathcal{R}_1(\mathcal{G})$ からの寄与については，$\exp(-R^4 S_\mathcal{G})$ を 1 に置き換えて，

$$|\mathcal{X}_{d,G}(R)| < A_1 \exp(-R^{2\eta}) + \mathcal{I}_{d,G}(R) \tag{F.10}$$

を得る．ここで，

$$\mathcal{I}_{d,G}(R) = \int_{\mathcal{R}_1(\mathcal{G})} \prod_{\nu=1}^{d} dx_\nu \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu)) \tag{F.11}$$

である．

条件 (F.3) より，x_μ のうち少なくとも 1 つに対して（それを x_1 とする）

$$\mathrm{Tr}(x_1 x_1) \geq d^{-1} \tag{F.12}$$

が成り立つ．

リー代数 $\mathcal{G}$ を Cartan-Weyl 基底 $\{H^i, E^\alpha\}$ で表すと便利である．ここで，$i = 1, \cdots, l$ で l はリー代数のランクであり，α はルートである．この基底では，

$$\begin{aligned} &[H^i, H^j] = 0, \quad [H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha, \\ &[E^\alpha, E^\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E^{\alpha+\beta} & (\alpha+\beta \text{がルート}) \\ 2|\alpha|^{-2} \alpha \cdot H & (\alpha = -\beta) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \end{aligned} \tag{F.13}$$

である．ここで，$E^{-\alpha} = (E^\alpha)^\dagger$ であり，基底の元は

$$\mathrm{Tr}(H^iH^j)=\delta^{ij},\quad \mathrm{Tr}(E^\alpha E^\beta)=2|\alpha|^{-2}\delta^{\alpha+\beta,0},\quad \mathrm{Tr}(H^iE^\alpha)=0 \tag{F.14}$$

と規格化されている．

被積分関数と積分測度はゲージ変換

$$A_\mu \to U^\dagger A_\mu U \tag{F.15}$$

のもとで不変である．ゲージ変換によって，常に x_1 を Cartan 部分代数にもっていける．

$$x_1 = x^iH^i. \tag{F.16}$$

そして，x_1 についての積分を Cartan モードについての積分に帰着させられる．

$$\prod_{a=1}^{g} dx_1 \to const. \prod_{i=1}^{l} dx^i \Delta_G^2(x). \tag{F.17}$$

ここで，$\Delta_G^2(x)$ はワイル測度である．

$$\Delta_G^2(x) = \prod_{\alpha>0}(x\cdot\alpha)^2. \tag{F.18}$$

$\prod_{\alpha>0}$ は正ルートについての積を表す．$G=SU(N)$ のときは，これは Van der Monde 行列式の 2 乗になる．(F.17) の導出は付録 B で示した $G=SU(N)$ の場合と同様にできる．x_μ $(\mu=2,\cdots,d)$ を

$$x_\mu = x_\mu^iH^i + x_\nu^\alpha E^\alpha \quad (\mu=2,\cdots,d) \tag{F.19}$$

と展開する．x_μ がエルミートであることより，$x_\mu^{-\alpha}=(x_\mu^\alpha)^*$ である．

領域 $\mathcal{R}_1(\mathcal{G})$ では，

$$-\mathrm{Tr}([x_1,x_\mu]^2) < R^{-2(2-\eta)} \quad (\mu=2,\cdots,d) \tag{F.20}$$

である．これを (F.13)，(F.14)，(F.16)，(F.19) を使って書き換えると

$$4\sum_{\alpha>0}\frac{(x\cdot\alpha)^2}{|\alpha|^2}|x_\mu^\alpha|^2 < R^{-2(2-\eta)}. \tag{F.21}$$

ここで，$(x\cdot\alpha)^2$ がある定数より大きければ，x_μ^α の大きさに対して $R^{-(2-\eta)}$ の上限がつき，(F.11) の積分に制限がつけられる．この事実を後で使う．

正ルートの選び方は有限個だが，以下のように正ルートを定義するのが便利である．まず，すべてのルートを 3 つに分類する．

(i) $x\cdot\alpha>0$,

(ii) $x\cdot\alpha<0$,

(iii) $x\cdot\alpha=0$. (F.22)

次に，(iii) に属するルートを標準的な Cartan の構成によって正と負にわける．ここで正のルートを (i) のルートを合わせて正ルートとする．構成により，正ルートについては $x \cdot \alpha \geq 0$ である．通常のように，l 個の単純正ルート $\{s_i\}$ が存在して，l 次元のルート空間を張る．任意の正ルート α は非負の整数 $\{n_i^\alpha\}$ によって，

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i^\alpha s_i \tag{F.23}$$

と表される．有限個の正ルートの選び方各々に応じて，x の積分領域は分割され，各分割された領域で上の性質は満たされる．すべての可能な単純正ルートの集合はワイル鏡映によって結びつくので，各領域はここでの積分に関して等価である．

さて，以下で正の数 c を定義する．

$$c = \min_{\{a^2=1\}} \max_i |a \cdot s_i|. \tag{F.24}$$

(F.12) より，少なくとも 1 つの単純ルートが存在して（それを s_1 とする）

$$x \cdot s_1 \geq cd^{-\frac{1}{2}} \tag{F.25}$$

が満たされる．さらに，s_1 を含む任意の正ルート α に対して，(F.23) より，

$$x \cdot \alpha \geq cd^{-\frac{1}{2}} \tag{F.26}$$

が成り立つ．

リー代数 $\mathcal{G}$ を以下のように分割する．単純ルート s_1 を省いて得られる $\mathcal{G}$ の正則埋め込み部分代数を $Lie(G') = \mathcal{G}'$ とする．$\mathcal{G}'$ のランクは $l-1$ である．$\mathcal{G}'$ と可換な H^i の線形結合を J とする．残る $\mathcal{G}$ の生成子を $\{F^\beta\}$ とする．ここで，β は s_1 を含むルートである．ルートの構造と $\mathcal{G}'$ の構成から，

$$\begin{aligned}
&[J, \mathcal{G}'] = 0, \\
&[F^\beta, \mathcal{G}'] \subset \{F^\gamma\}, \\
&[J, F^\beta] \subset \{F^\gamma\}, \\
&[\mathcal{G}', \mathcal{G}'] \subset \mathcal{G}'
\end{aligned} \tag{F.27}$$

であることがわかる．x_μ を

$$x_\mu = y_\mu + \rho_\mu J + \omega_\mu^\beta F^\beta \tag{F.28}$$

と分解する．ここで，$y_\mu \in \mathcal{G}'$ である．(F.26) と (F.21) は ω_μ^β に制限を課す．

$$|\omega_\mu^\beta| < \frac{1}{2} c^{-1} d^{\frac{1}{2}} R^{-(2-\eta)} \quad (\mu = 2, \cdots, d). \tag{F.29}$$

積分領域は分割されているが，

(F.28) より $S_{\mathcal{G}}(x_\mu)$ は次の形をとる．

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{G}}(x_\mu) &= S_{\mathcal{G}'}(y_\mu) + 2\mathrm{Tr}([y_\mu, y_\nu][F^\beta, F^\gamma])\omega_\mu^\beta \omega_\nu^\gamma \\ &\quad + \mathrm{Tr}(\omega_\nu^\beta [y_\mu, F^\beta] - \omega_\mu^\beta [y_\nu, F^\beta] + (\rho_\mu \omega_\nu^\beta - \rho_\nu \omega_\mu^\beta)[J, F^\beta] \\ &\quad\quad + \omega_\mu^\beta \omega_\nu^\gamma [F^\beta, F^\gamma])^2 \\ &= S_{\mathcal{G}'}(y_\mu) + \mathcal{O}(R^{-2(2-\eta)}). \end{aligned} \tag{F.30}$$

ここで，(F.29) と，y_μ と ρ が定数で押さえられることを使った．こうして，定数倍を除いて，

$$x_\mu \in \mathcal{R}_1(\mathcal{G}) \longrightarrow y_\mu \in \mathcal{R}_1(\mathcal{G}') \tag{F.31}$$

であることがわかる．さらに，(F.18) と (F.26) より，

$$\Delta_G^2(x) < const. \Delta_{G'}^2(y) \tag{F.32}$$

であることもわかる．

ρ と ω_μ^β の自由度を積分すると，(F.29)，(F.31)，(F.32) より，

$$\mathcal{I}_{d,G}(R) < B_1 R^{-(2-\eta)(d-1)(g-g'-1)} \mathcal{F}_{d,G'}(R) \tag{F.33}$$

を得る．ここで，B_1 は定数であり，

$$\mathcal{F}_{d,G'}(R) = \int_{\mathcal{R}_1(G')} \prod_{\nu=1}^{d} dy_\nu \theta(1 - \mathrm{Tr}(y_\mu y_\mu)) \tag{F.34}$$

である．定式では G' のワイル測度を吸収して，G' ゲージ不変の形を回復した．

恒等式

$$\theta(1 - \mathrm{Tr}(y_\mu y_\mu)) = \int_0^1 dt \delta(t - \mathrm{Tr}(y_\mu y_\mu)) \tag{F.35}$$

を使い，

$$t = \left(\frac{u}{R}\right)^{2-\eta}, \quad y_\mu = \tilde{y}_\mu \left(\frac{u}{R}\right)^{1-\eta/2} \tag{F.36}$$

とリスケーリングすることにより，

$$\mathcal{F}_{d,G'}(R) = (2-\eta) R^{-(1-\eta/2)dg'} \int_0^R du u^{(1-\eta/2)dg'-1} \mathcal{I}_{d,G'}(u) \tag{F.37}$$

を得る．

以下では，数学的帰納法で進めていく．示したいことは，

$$\int_0^\infty dR R^{dg-1} \mathcal{I}_{d,G}(R) < const. \tag{F.38}$$

である．G' に対して，(F.38) が成立しているとする．(F.37) より，B_2 をある定数として，

$$\mathcal{F}_{d,G'}(R) < B_2 R^{-(1-\eta/2)dg'} \tag{F.39}$$

となる．さらに，(F.33) より，B_3 をある定数として，

$$\mathcal{I}_{d,G}(R) < B_3 R^{-(1-\eta/2)[2(d-1)(g-g'-1)+dg']} \tag{F.40}$$

が成り立つ．これより，(F.38) が G に対して成り立つか判定する．以下やることは $\mathcal{G}'$ の中で，(F.40) の右辺で $1/R$ の冪が最小になるものを見つけることである．このために，次の事実が必要である．$\mathcal{G}'$ が 2 つの部分代数の直和のとき，すなわち $\mathcal{G}' = \mathcal{G}'_1 \oplus \mathcal{G}'_2$ のとき，

$$\theta(1 - \mathrm{Tr}_{\mathcal{G}'}(y_\mu y_\mu)) \leq \theta(1 - \mathrm{Tr}_{\mathcal{G}'_1}(y_\mu y_\mu))\theta(1 - \mathrm{Tr}_{\mathcal{G}'_2}(y_\mu y_\mu)) \tag{F.41}$$

と

$$S_{\mathcal{G}'} = S_{\mathcal{G}'_1} + S_{\mathcal{G}'_2} \tag{F.42}$$

より，

$$\mathcal{F}_{d,G'}(R) < \mathcal{F}_{d,G'_1}\mathcal{F}_{d,G'_2} \tag{F.43}$$

が成り立つ．

以下，$SU(r+1)$ の場合に具体的に見ていく．$su(r+1)$ のディンキン図は図 F.1 に与えられている．ここで，ノードは r 個ある．$\mathcal{G}'$ はノードを 1 個取り除くことによって得られ，

$$su(r+1) \to \mathcal{G}' = su(m) \oplus su(r+1-m) \quad (1 \leq m \leq r) \tag{F.44}$$

である．ここで，$su(1) = 0$ である．$su(m)$ の次元は $m^2 - 1$ なので，

$$g' = m^2 + (r+1-m)^2 - 2 \tag{F.45}$$

である．

リー代数 $su(2)$ は $\mathcal{G}'$ を持たない．よって，(F.40) で $g' = 0$ としてよくて，

$$\mathcal{I}_{d,SU(2)} < B_3 R^{-(1-\eta/2)4(d-1)} \tag{F.46}$$

となる．これを (F.38) に代入すると，$Z_{d,SU(2)}$ は $d \geq 5$ に対して有限であることがわかる．また，これを (F.37) に代入すると，B_4 をある定数として，

$$\mathcal{F}_{d,SU(2)} < B_4 R^{-(1-\eta/2)3d} R^{(1-\eta/2)\delta_{d,3}} (\log R)^{\delta_{d,4}} \tag{F.47}$$

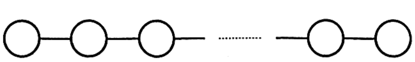


図 F.1　$su(r+1)$ のディンキン図．

を得る．これを (F.39) と比較すると，$d=3$ と $d=4$ では変形されていることがわかるが，$d=4$ での $\log R$ の変形は以下の議論には効かない．

リー代数 $su(3)$ は $\mathcal{G}'$ として $su(2)$ のみを持つ．(F.47) を (F.33) に代入すると，B_5 をある定数として，

$$\mathcal{I}_{d,SU(3)} < B_5 R^{(1-\eta/2)(-11d+8+\delta_{d,3})}(\log R)^{\delta_{d,4}} \tag{F.48}$$

を得る．これを (F.38) に代入すると，$Z_{d,SU(3)}$ は $d \geq 4$ に対して有限であることがわかる．また，これを (F.37) に代入すると，B_6 をある定数として，

$$\mathcal{F}_{d,SU(3)} < B_6 R^{-(1-\eta/2)8d}(\log R)^{\delta_{d,3}} \tag{F.49}$$

を得る．(F.39) は $d=3$ のときに $\log R$ の補正があるが，この補正は後の議論に効かない．

(F.43) の性質と上で得た (F.47) と (F.49) から，帰納法を使って，(F.40) の成立は保証される（ただし，$d=3$ のときの補正はある）．よって，$r \geq 3$ のときの $SU(r+1)$ に対して，(F.40) で，$1/R$ の冪が最小になる $\mathcal{G}'$ を探す．$d=3$ で $\mathcal{G}' = su(2) \oplus su(r-1)$ のときは，(F.40) の右辺に $R^{(1-\eta/2)}$ が掛かる（$r=3$ のときはさらに $R^{(1-\eta/2)}$ が掛かる）ことに注意する．(F.45) より，

$$2(d-1)(g-g'-1)+dg' = (4-2d)(m^2-(r+1)m)+dg-d \tag{F.50}$$

を得る．これは，$m=r(m=1)$ のとき最小値

$$(2d-4)r+dg-d \tag{F.51}$$

をとる．これより，$\mathcal{G}' = su(r)$ が求める $\mathcal{G}'$（$d=3$，$r=3$ のときは $\mathcal{G}' = su(2) \oplus su(2)$ も同じ寄与を与えうる）であることがわかる．(F.51) を (F.40) に代入したものを (F.38) に代入すると，$d \geq 3$，$r \geq 3$ で $Z_{d,SU(r+1)}$ は有限であることがわかる．

以上から，ボゾニック模型は

$$\begin{aligned} SU(2):&\ d \geq 5, \\ SU(3):&\ d \geq 4, \\ SU(r+1)\ (r \geq 3):&\ d \geq 3 \end{aligned} \tag{F.52}$$

で有限になることが言えた．実は，これ以外の場合は発散することも言える．(F.52) が分配関数の収束のための必要十分条件である *1)．

次に，超対称模型を考える．

$$Z_{d,G} = \int dA \mathcal{P}_{d,G}(A_\lambda) \exp\left(\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]^2)\right). \tag{F.53}$$

*1) これは [109] における考察と合っている．

ここで，$d = 4, 6, 10$ である．$\mathcal{P}_{d,G}(A)$ はフェルミオンの積分からくるパフィアン

$$\mathcal{P}_{d,G}(A) = \int d\psi \exp(\bar{\psi}\Gamma^{\mu}[A_{\mu}, \psi]) \tag{F.54}$$

であり，A_{μ} の $(d-2)g$ 次の同次多項式である．$d = 6, 10$ のときは $\mathcal{P}_{d,G}(A_{\lambda})$ は複素数である．

ボゾニック模型の場合と同様にして，

$$Z_{d,G} = \int_0^{\infty} dR R^{dg-1} R^{(d-2)g} \mathcal{X}_{d,G}(R). \tag{F.55}$$

ここで，

$$\mathcal{X}_{d,G}(R) = \int \prod_{\nu=1}^{d} dx_{\nu} \mathcal{P}_{d,G}(x) \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_{\mu}x_{\mu})) \exp(-R^4 S_{\mathcal{G}}) \tag{F.56}$$

である．

以下では，ガンマ行列は省略し，スピノールの足と群の足も省略する．$2r$ 個のフェルミオンを挿入した一般化されたパフィアンを考える．

$$\mathcal{P}^{r}_{d,G}(x, R) = R^{-(2-\eta)2r} \int d\psi \exp(\psi[x, \psi]) \psi^1 \cdots \psi^{2r}. \tag{F.57}$$

ここで，$r = 0, 1, \cdots, (d-2)g$ が可能である．そして，前と同じく積分領域を (F.9) のように分割して

$$\mathcal{I}^{r}_{d,G}(R) = \int_{\mathcal{R}_1(\mathcal{G})} \prod_{\nu=1}^{d} dx_{\nu} |\mathcal{P}^{r}_{d,G}(x, R)| \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_{\mu}x_{\mu})) \tag{F.58}$$

と定義すると，(F.10) に対応した

$$|\chi^{r}_{d,G}(R)| < A_1 \exp(-R^{2\eta}) + \mathcal{I}^{r}_{d,G}(R) \tag{F.59}$$

を得る．

ボゾニックの場合と同様に，部分代数 $\mathcal{G}'$ を考え，(F.28) の分解をすると，再び (F.29) が成り立つ．さらに，フェルミオンを

$$\psi = \phi + \xi + \chi \tag{F.60}$$

と分解する．ここで，$\phi \in \mathcal{G}'$，$\xi = \xi J$，$\chi = \chi^{\beta} F^{\beta}$ である．(F.27) より，

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\psi[x, \psi]) =& \mathrm{Tr}(\phi[y, \phi]) + \mathrm{Tr}(\phi[\omega, \chi]) + \mathrm{Tr}(\chi[\omega, \phi]) + \mathrm{Tr}(\chi[\omega, \xi]) \\ &+ \mathrm{Tr}(\xi[\omega, \chi]) + \mathrm{Tr}(\chi[x, \chi]) \end{aligned} \tag{F.61}$$

となる．ここで，$\omega = \omega^{\beta} F^{\beta}$ である．(F.61) を (F.57) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{d,G}(x) = \int d\phi d\chi d\xi \frac{\xi^1 \cdots \xi^k}{R^{k(2-\eta)}} \frac{\phi^1 \cdots \phi^m}{R^{m(2-\eta)}} \frac{\chi^1 \cdots \chi^n}{R^{n(2-\eta)}} \\
\times \exp(\mathrm{Tr}(\phi[y,\phi]) + \mathrm{Tr}(\phi[\omega,\chi]) + \mathrm{Tr}(\chi[\omega,\phi]) + \mathrm{Tr}(\chi[x,\chi])) \\
\times \frac{1}{(2(d-2)-k)!} (\mathrm{Tr}(\chi[\omega,\xi]) + \mathrm{Tr}(\xi[\omega,\chi]))^{2(d-2)-k}
\end{aligned}
\tag{F.62}
$$

となる．ここで，$k+m+n=2r$ である．

まず，$2(d-2)$ 個のグラスマン数 ξ_α について積分する．ξ は ω か $R^{-(2-\eta)}$ と組になって現われているから，(F.29) を使うと，

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}_{d,G}(x)| < & \frac{R^{-2(d-2)(2-\eta)}}{(2(d-2)-k)!} \sum_P \left| \int d\phi d\chi \frac{\phi^1 \cdots \phi^m}{R^{m(2-\eta)}} \frac{\chi^1 \cdots \chi^{n+2(d-2)-k}}{R^{n(2-\eta)}} \right. \\
& \times \exp(\mathrm{Tr}(\phi[y,\phi]) + \mathrm{Tr}(\phi[\omega,\chi]) \\
& \left. + \mathrm{Tr}(\chi[\omega,\phi]) + \mathrm{Tr}(\chi[x,\chi])) \right|
\end{aligned}
\tag{F.63}
$$

となる．ここで，P はすべての可能な足の入れ替えを表す．次に，$\phi\omega\chi$ 項を展開する．

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}_{d,G}(x)| < & R^{-2(d-2)(2-\eta)} \sum_P \sum_l \frac{2^l}{l!(2(d-2)-k)!} \\
& \times \left| \int d\phi \frac{\phi^1 \cdots \phi^{m+l}}{R^{(m+l)(2-\eta)}} \exp(\mathrm{Tr}(\phi[y,\phi]) \right| \\
& \times \max_x \left| \int d\chi \frac{\chi^1 \cdots \chi^{n+2(d-2)-k+l}}{R^{n(2-\eta)}} \exp(\mathrm{Tr}(\chi[x,\chi]) \right| .
\end{aligned}
\tag{F.64}
$$

最後に，χ について積分し，x が上限のある量であることを使うと，

$$
|\mathcal{P}^r_{d,G}(x)| < R^{-(2-\eta)2(d-2)} \sum_{r'} C_{r'} \left| \mathcal{P}^{r'}_{d,G'}(y,R) \right| \tag{F.65}
$$

を得る．ここで，$C_{r'}$ は定数である．

(F.65) を (F.58) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^r_{d,G}(R) < & R^{-(2-\eta)2(d-2)} \\
& \times \sum_{r'} C_{r'} \int_{\mathcal{R}_1(\mathcal{G})} \prod_{\nu=1}^d dx_\nu |\mathcal{P}^{r'}_{d,G'}(y,R)| \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu))
\end{aligned}
\tag{F.66}
$$

を得る．ω と ρ について積分すると，

$$\mathcal{I}^r_{d,G}(R) < R^{-(2-\eta)2(d-2)} R^{-(2-\eta)(d-1)(g-g'-1)} \\ \times \sum_{r'} C_{r'} \int_{\mathcal{R}_1(G')} \prod_{\nu=1}^{d} dy_\nu |\mathcal{P}^{r'}_{d,G'}(y,R)| \theta(1-\mathrm{Tr}(y_\mu y_\mu)) \tag{F.67}$$

を得る．ここで，ボゾニックの場合と同様に，(F.35) の書き換えをして，(F.36) のリスケーリングをすると，

$$\mathcal{I}^r_{d,G}(R) < R^{-(2-\eta)2(d-2)} R^{-(2-\eta)(d-1)(g-g'-1)} \\ \times \sum_{r'} C_{r'} \int_0^R \frac{du}{u} \left(\frac{u}{R}\right)^{(2-\eta)((d-1)g'+\frac{3r'}{2}} \\ \times \int_{\mathcal{R}_1(G')} \prod_{\nu=1}^{d} d\bar{y}_\nu |\mathcal{P}^{r'}_{d,G'}(\bar{y},R)| \theta(1-\mathrm{Tr}(\bar{y}_\mu \bar{y}_\mu)) \tag{F.68}$$

となる．$u/R < 1$ であるから，これは

$$\mathcal{I}^r_{d,G}(R) < R^{-(2-\eta)(2(d-2)+(d-1)(g-1))} \sum_{r'} C_{r'} \int_0^R \frac{du}{u} u^{(2-\eta)(d-1)g'} \mathcal{I}^{r'}_{d,G'}(u) \tag{F.69}$$

に帰着する．

以下，帰納法で議論を進める．G' に対して，

$$\int_0^\infty dR R^{dg'-1} R^{(d-2)g'} \mathcal{I}^r_{D,G'}(R) \tag{F.70}$$

が $d > 3$ ですべての r について収束すると仮定する．すると，(F.69) から，

$$\mathcal{I}^r_{d,G}(R) < CR^{-(2-\eta)[2(d-2)+(d-1)(g-1)]} \tag{F.71}$$

が成立する．これにより，帰納法の仮定が G についても真になることがわかる．最後に帰納法の仮定が最小の正則埋め込み部分代数 ($su(2)$) に対して真であることを言う必要がある．$su(2)$ は正則埋め込み部分代数を持っていないから，上の議論を $\mathcal{G}' = 0$ に対して繰り返すと，

$$\mathcal{I}^r_{d,SU(2)} < CR^{-(2-\eta)[2(d-2)+2(d-1)]} \tag{F.72}$$

であることがわかり，証明が完結する．

$r = 0$ ととると，任意のコンパクト半単純群 G に対して，

$$\mathcal{I}_{d,G} < CR^{-(2-\eta)[2(d-2)+(d-1)(g-1)]} \tag{F.73}$$

が成り立つ．分配関数 $\mathcal{Z}_{d,G}$ は収束する．相関関数

$$\langle \mathcal{C}_k(A_\sigma) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_{d,G}} \int \prod_{\mu=1}^{d} A_\mu \mathcal{C}_k(A_\sigma) \mathcal{P}_{d,G}(A_\mu) \exp\left(\mathrm{Tr}[A_\mu, A_\nu]^2\right) \tag{F.74}$$

（ここで $\mathcal{C}_k$ は k 次の多項式）については，収束のために

$$dg + (d-2)g + k < 2[(2(d-2) + (d-1)(g-1)] \tag{F.75}$$

が要求される．よって，k の臨界値は

$$k_c = 2(d-3) \tag{F.76}$$

であり，ゲージ群に依らない．

参考文献

[1] S. H. Shenker, In “Brezin, E. (ed.), Wadia, S.R. (ed.): The large N expansion in quantum field theory and statistical physics” 809–819. and In “Cargese 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity” 191–200.

[2] J. Polchinski, Phys. Rev. D **50**, 6041 (1994) [hep-th/9407031].

[3] M. R. Douglas, JHEP **0305**, 046 (2003) [hep-th/0303194].

[4] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0206**, 045 (2002) [hep-th/0204168].

[5] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0210**, 031 (2002) [hep-th/0206182].

[6] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[7] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [hep-th/9610043].

[8] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [hep-th/9703030].

[9] F. David, Mod. Phys. Lett. A **3**, 1651 (1988).

[10] J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).

[11] H. Kawai, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **26**, 93 (1992).

[12] E. Brezin and V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).

[13] M. R. Douglas and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **335**, 635 (1990).

[14] D. J. Gross and A. A. Migdal, Phys. Rev. Lett. **64**, 127 (1990); Nucl. Phys. B **340**, 333 (1990).

[15] M. Hanada, M. Hayakawa, N. Ishibashi, H. Kawai, T. Kuroki, Y. Matsuo and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **112**, 131 (2004) [hep-th/0405076].

[16] F. David, Nucl. Phys. B **348**, 507 (1991).

[17] F. David, Phys. Lett. B **302**, 403 (1993) [hep-th/9212106].

[18] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, hep-th/0101152.

[19] S. Y. Alexandrov, V. A. Kazakov and D. Kutasov, JHEP **0309**, 057 (2003) [hep-th/0306177].

[20] T. Tada, Phys. Lett. B **259**, 442 (1991).

[21] M. R. Douglas, In “Cargese 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity” 77–83.

[22] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, hep-th/0001012.

[23] J. Teschner, hep-th/0009138.

[24] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).

[25] G. Bhanot, U. M. Heller and H. Neuberger, Phys. Lett. B **113**, 47 (1982).

[26] G. Parisi, Phys. Lett. B **112**, 463 (1982).

[27] D. J. Gross and Y. Kitazawa, Nucl. Phys. B **206**, 440 (1982).

[28] S. R. Das and S. R. Wadia, Phys. Lett. B **117**, 228 (1982) [Erratum-ibid. B **121**, 456 (1983)].

[29] B. Bringoltz and S. R. Sharpe, Phys. Rev. D **80**, 065031 (2009) [arXiv:0906.3538 [hep-lat]].

[30] T. Azeyanagi, M. Hanada, M. Unsal and R. Yacoby, Phys. Rev. D **82**, 125013 (2010) [arXiv:1006.0717 [hep-th]].

[31] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, Phys. Rev. D **27**, 2397 (1983).

[32] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, JHEP **1007**, 043 (2010) [arXiv:1005.1981 [hep-th]].

[33] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, Phys. Lett. B **718**, 1524 (2013) [arXiv:1206.0049 [hep-th]].

[34] H. Kawai, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3389 (2010) [arXiv:0912.1456 [hep-th]].

[35] H. Kawai, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **81**, 085019 (2010) [arXiv:1002.2308 [hep-th]].

[36] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008) [arXiv:0807.2352 [hep-th]].

[37] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].

[38] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].

[39] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].

[40] J. W. Elliott, J. Giedt and G. D. Moore, Phys. Rev. D **78**, 081701 (2008) [arXiv:0806.0013 [hep-lat]].

[41] M. Hanada, S. Matsuura and F. Sugino, Prog. Theor. Phys. **126**, 597 (2011) [arXiv:1004.5513 [hep-lat]].

[42] M. Hanada, JHEP **1011**, 112 (2010) [arXiv:1009.0901 [hep-lat]].

[43] S. Catterall, J. Giedt and A. Joseph, JHEP **1310**, 166 (2013) [arXiv:1306.3891 [hep-lat]].

[44] N. Kim, T. Klose and J. Plefka, Nucl. Phys. B **671**, 359 (2003) [hep-th/0306054].

[45] H. Lin and J. M. Maldacena, Phys. Rev. D **74**, 084014 (2006) [hep-th/0509235].

[46] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena and H. S. Nastase, JHEP **0204**, 013 (2002) [hep-th/0202021].

[47] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, JHEP **0205**, 056 (2002) [hep-th/0205185].

[48] E. Witten, Nucl. Phys. B **460**, 335 (1996) [hep-th/9510135].

[49] W. Taylor, Phys. Lett. B **394**, 283 (1997) [hep-th/9611042].

[50] D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0305**, 037 (2003) [hep-lat/0206019].

[51] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0308**, 024 (2003) [hep-lat/0302017].
[52] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001) [hep-th/0106048].
[53] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) [hep-th/9908141].
[54] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, Nucl. Phys. B **573**, 573 (2000) [hep-th/9910004].
[55] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP **0002**, 020 (2000) [hep-th/9912072].
[56] T. Filk, Phys. Lett. B **376**, 53 (1996).
[57] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9**, 69 (1992).
[58] J. Hoppe, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 5235 (1989).
[59] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, Commun. Math. Phys. **178**, 507 (1996) [hep-th/9510083].
[60] S. Baez, A. P. Balachandran, B. Ydri and S. Vaidya, Commun. Math. Phys. **208**, 787 (2000) [hep-th/9811169].
[61] G. Ishiki, S. Shimasaki, Y. Takayama and A. Tsuchiya, JHEP **0611**, 089 (2006) [hep-th/0610038].
[62] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **77**, 126015 (2008) [arXiv:0802.2782 [hep-th]].
[63] D. Varshalovich, A. Moskalev and V. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
[64] S. Iso, Y. Kimura, K. Tanaka and K. Wakatsuki, Nucl. Phys. B **604**, 121 (2001) [hep-th/0101102].
[65] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Nucl. Phys. B **684**, 162 (2004) [hep-th/0312199].
[66] M. Teper and H. Vairinhos, Phys. Lett. B **652**, 359 (2007) [hep-th/0612097].
[67] T. Azeyanagi, M. Hanada, T. Hirata and T. Ishikawa, JHEP **0801**, 025 (2008) [arXiv:0711.1925 [hep-lat]].
[68] J. Ambjorn, Y. M. Makeenko, J. Nishimura and R. J. Szabo, JHEP **0005**, 023 (2000) [hep-th/0004147].
[69] A. Schild, Phys. Rev. D **16**, 1722 (1977).
[70] E. G. Floratos and J. Iliopoulos, Phys. Lett. B **201**, 237 (1988).
[71] D. B. Fairlie, P. Fletcher and C. K. Zachos, Phys. Lett. B **218**, 203 (1989).
[72] D. B. Fairlie and C. K. Zachos, Phys. Lett. B **224**, 101 (1989).
[73] E. G. Floratos, Phys. Lett. B **228**, 335 (1989).
[74] C. N. Pope and L. J. Romans, Class. Quant. Grav. **7**, 97 (1990).
[75] H. Itoyama and A. Tokura, Phys. Rev. D **58**, 026002 (1998) [hep-th/9801084].
[76] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **510**, 158 (1998)

[hep-th/9705128].

[77] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, Nucl. Phys. B **219**, 437 (1983).

[78] H. Itoyama and A. Tokura, Prog. Theor. Phys. **99**, 129 (1998) [hep-th/9708123].

[79] M. Hanada, H. Kawai and Y. Kimura, Prog. Theor. Phys. **114**, 1295 (2006) [hep-th/0508211].

[80] H. Steinacker, Class. Quant. Grav. **27**, 133001 (2010) [arXiv:1003.4134 [hep-th]].

[81] H. S. Yang, JHEP **0905**, 012 (2009) [arXiv:0809.4728 [hep-th]].

[82] Y. Asano, H. Kawai and A. Tsuchiya, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250089 (2012) [arXiv:1205.1468 [hep-th]].

[83] W. Krauth, H. Nicolai and M. Staudacher, Phys. Lett. B **431**, 31 (1998) [hep-th/9803117].

[84] P. Austing and J. F. Wheater, JHEP **0102**, 028 (2001) [hep-th/0101071].

[85] P. Austing and J. F. Wheater, JHEP **0104**, 019 (2001) [hep-th/0103159].

[86] J. Ambjorn, K. N. Anagnostopoulos, W. Bietenholz, T. Hotta and J. Nishimura, JHEP **0007**, 013 (2000) [hep-th/0003208].

[87] K. N. Anagnostopoulos, T. Azuma and J. Nishimura, JHEP **1311**, 009 (2013) [arXiv:1306.6135 [hep-th]].

[88] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **99**, 713 (1998) [hep-th/9802085].

[89] J. Nishimura and G. Vernizzi, JHEP **0004**, 015 (2000) [hep-th/0003223].

[90] J. Nishimura and F. Sugino, JHEP **0205**, 001 (2002) [hep-th/0111102].

[91] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, Nucl. Phys. B **647**, 153 (2002) [hep-th/0204240].

[92] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara, Prog. Theor. Phys. **109**, 115 (2003) [hep-th/0211272].

[93] T. Aoyama, H. Kawai and Y. Shibusa, Prog. Theor. Phys. **115**, 1179 (2006) [hep-th/0602244].

[94] J. Nishimura, T. Okubo and F. Sugino, JHEP **1110**, 135 (2011) [arXiv:1108.1293 [hep-th]].

[95] T. Imai, Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **665**, 520 (2003) [hep-th/0303120].

[96] T. Imai, Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **679**, 143 (2004) [hep-th/0307007].

[97] T. Imai and Y. Takayama, Nucl. Phys. B **686**, 248 (2004) [hep-th/0312241].

[98] G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, Commun. Math. Phys. **209**, 77 (2000) [hep-th/9803265].

[99] S. -W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, Phys. Rev. Lett. **108**, 011601 (2012) [arXiv:1108.1540 [hep-th]].

[100] T. Yoneya, Prog. Theor. Phys. **97**, 949 (1997) [hep-th/9703078].

[101] S. -W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, JHEP **1210**, 147 (2012) [arXiv:1208.0711 [hep-th]].

[102] H. Aoki, S. Iso and T. Suyama, Nucl. Phys. B **634**, 71 (2002) [hep-th/0203277].

[103] A. Chatzistavrakidis, H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **1005**, 100 (2010) [arXiv:1002.2606 [hep-th]].

[104] H. Aoki, Prog. Theor. Phys. **125**, 521 (2011) [arXiv:1011.1015 [hep-th]].

[105] A. Chatzistavrakidis, H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **1109**, 115 (2011) [arXiv:1107.0265 [hep-th]].

[106] J. Nishimura and A. Tsuchiya, JHEP **1312**, 002 (2013) [arXiv:1305.5547 [hep-th]].

[107] O. Alvarez, Nucl. Phys. B **216**, 125 (1983).

[108] E. D'Hoker and D. H. Phong, Rev. Mod. Phys. **60**, 917 (1988).

[109] T. Hotta, J. Nishimura and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **545**, 543 (1999) [hep-th/9811220].

索　引

欧字

ア

カ

サ

著者略歴

土屋 麻人
つちや あさと

1995 年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了
　博士（理学）（東京大学，1995 年）
　大阪大学大学院理学研究科助教などを経て，
現在　静岡大学大学院理学研究科准教授
専門　素粒子論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 104
『弦理論と行列模型　弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方』
著　者　土屋 麻人
2014 年 3 月10日　初版発行

数理科学編集部　発行人　木下敏孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．
表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL.(03)5474–8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474–8600(広告部)

組版　（株）ゼロメガ
印刷　（株）シナノ　中澤 眞
製本　（株）関川製本所　関川安博

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-93：for Senior & Graduate Courses）

超弦理論の応用

物理諸分野でのAdS/CFT双対性の使い方

夏梅　誠　著

本体 2495 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

超弦理論から生まれ，今や一般相対論，原子核物理，物性物理，非平衡統計力学などの関わる「現実世界」を解析するうえでも強力な方法になりつつあるAdS/CFT双対性の「応用」について大学院生や他分野の研究者向けに解説．著者が行った集中講義がもとになっており，初学者でも学びやすいような工夫がなされている．時宜をとらえた得難い一冊．

サイエンス社